Devoir : Révisions d'analyse (2h00)

Exercice 1 : Calculs rapides et fonctions usuelles

1. *Donnons le résultat sous forme d'une puissance de* 10 *:*

$$a = 10^5 \cdot 10^3 = \boxed{10^8},\ b = (10^5)^3 = \boxed{10^{15}},\ c = \frac{10^5}{10^3} = \boxed{10^2} \text{ et } d = \frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}} = \frac{10^{-15+5}}{10^{3-5}} = \frac{10^{-10}}{10^{-2}} = \boxed{10^{-8}}.$$

2. *Simplifions :*

$$a = \sqrt{(-5)^2} = |-5| = \boxed{5},\ b = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \boxed{\sqrt{3}-1} \text{ et } c = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = \boxed{2-\sqrt{3}}.$$

3. *Utilisons la quantité conjuguée pour rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes :*

$$a = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{4-2} = \boxed{\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2}}$$

et

$$b = \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{3-1}\right)^2 = \frac{25 \times 2(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \boxed{\frac{25}{2}(\sqrt{3}-1)^2}$$

4. On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$.
Pour $x > 1$, *calculons et simplifions les expressions suivantes :*

$$a(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} = \frac{f^2(x)+1}{f(x)} = \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \boxed{\frac{x\sqrt{x-1}}{x-1}}$$

$$b(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \boxed{\frac{1}{2(x-1)}} \text{ car } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$c(x) = \frac{f(x)}{f''(x)} = \sqrt{x-1} \times \frac{1}{\dfrac{-1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}} = -4\sqrt{x-1}(x-1)\sqrt{x-1} = \boxed{-4(x-1)^2}$$

car $f''(x) = \dfrac{-2\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{4(x-1)} = -\dfrac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$

5. *Calculons les nombres suivants en fonction de* $\ln(2)$, $\ln(3)$ *et* $\ln(5)$ *:*

$$a = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{-\ln(2^2)}{8} + \frac{\ln(2^3)}{4} = \frac{-2\ln(2) + 2 \times 3\ln(2)}{8} = \frac{4\ln(2)}{8} = \boxed{\frac{\ln(2)}{2}}$$

et

$$b = \ln(0,125) = \ln\left(\frac{125}{1000}\right) = \ln\left(\frac{5^3}{2^3 5^3}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^3}\right) = -\ln(2^3) = \boxed{-3\ln(2)}$$

6. Télescopages :

$$\begin{aligned} A &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \cdot + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{99} (\ln(k) - \ln(k+1)) \\ &= \ln(1) - \ln(100) = -\ln(2^2 5^2) = \boxed{-2\ln(2) - 2\ln(5)} \end{aligned}$$

7. *Écrivons les nombre suivants le plus simplement possible :*

$$a = e^{3\ln(2)} = e^{\ln(2^3)} = 2^3 = \boxed{8}; \qquad b = \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}\ln(e) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$c = e^{-2\ln(3)} = e^{\ln(3^{-2})} = \frac{1}{3^2} = \boxed{\frac{1}{9}}\ ; \quad d = e^{\ln(3)-\ln(2)} = e^{\ln(3/2)} = \boxed{\frac{3}{2}}\ ; \quad e = -e^{-\ln(1/2)} = -e^{\ln(2)} = \boxed{-2}$$

Exercice 2 : Études de fonctions - parité

8. Les fonctions suivantes sont paires ou impaires. *Justifions notre réponse dans chaque cas :*

a) $f_1 : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2022+x}{2022-x}\right)$.
On peut commencer par noter que f_1 est définie sur $]-2022;2022[$ qui est symétrique par rapport à 0 puisque

$$\text{signe}\left(\frac{2022+x}{2022-x}\right) = \text{signe}((2022-x)(2022+x)) > 0 \text{ sur }]-2022;2022[.$$

Par ailleurs, $\forall x \in]-2022;2022[$:

$$f_1(-x) = \ln\left(\frac{2022-x}{2022+x}\right) = -\ln\left(\frac{2022+x}{2022-x}\right) = -f_1(x)$$

Conclusion : $\boxed{f_1 \text{ est impaire}}$

b) $f_2 : x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$
On commence par noter que f_2 est définie sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout x réel :

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \text{ donc } x+\sqrt{x^2+1} > x+|x| \geq 0 \text{ puisque } -x \leq |x| \leq x$$

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1}) = -\ln\left(\frac{1}{-x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{-x^2+(x^2+1)}\right) = -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -f_2(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f_2 \text{ est impaire}}$

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
On note que f_3 est définie elle aussi sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f_3(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f_3(x)$$

Conclusion : $\boxed{f_3 \text{ est impaire}}$

9. *Étudions la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f_3 :*

$$f_3(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

Conclusion : $\boxed{\underset{x\to+\infty}{lim} f_3(x) = 1 \text{ et par imparité, } \underset{x\to-\infty}{lim} f_3(x) = -1}$

Exercice 3 : Sommes usuelles

10. Donner la valeur des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2\frac{1-2^n}{1-2} = -2(1-2^n) = \boxed{2(2^n-1)}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{2^k} = \left(1+\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\frac{1}{2^k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^k} \text{ car } \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$= \frac{n}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\frac{1}{2^i} = \frac{n}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boxed{\frac{n}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$$

11. *Rappelons la formule de Pascal :* $\boxed{\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}}$

Application :

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{p}{p} + \sum_{k=p+1}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}\right)$$
$$= 1 + \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} = 1 + \binom{n+1}{p+1} - 1$$
$$= \boxed{\binom{n+1}{p+1}, \forall 0 \le p \le n}$$

Cours sur les suites numériques :

12. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Exprimons v_n en fonction de n pour tout entier naturel n : On a reconnu une suite arithmético-géométrique. Un raisonnement possible est le suivant :

$$\begin{cases} v_{n+1} & = 2v_n + 3 \\ l & = 2l + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{n+1} - l & = 2(v_n - l) \\ l = -3 & \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \end{matrix}$$

La suite $(v_n - l)_{n\ge 0} = (v_n + 3)_{n\ge 0}$ est une suite géométrique. D'où :

$$v_n + 3 = 2^n(v_0 + 3),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Conclusion : $\boxed{v_n = 4 \cdot 2^n - 3 = 2^{n+2} - 3,\ \forall n \in \mathbb{N}}$

13. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. on suppose que $w_0 = 2$.

Déterminons w_{100} : Il suffisait ici de noter que $w_1 = \frac{1}{2}w_0^2 = \frac{4}{2} = 2 = w_0$.
Une récurrence immédiate permet alors de montrer que la suite (w_n) est constante égale à 2.
Conclusion : $\boxed{\text{Si } w_0 = 2, \text{ alors } w_{100} = 2...}$

14. On considère la même suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais on suppose cette fois que $w_0 = 1$.
Calculons w_1 et w_2 : $w_1 = \frac{1}{2}$ et $w_2 = \frac{w_1^2}{2} = \frac{1}{8}$.

Exprimons maintenant w_n en fonction de n pour tout entier naturel n : On ne reconnait pas une suite usuelle mais l'énoncé nous aide en nous demandant de faire apparaître une suite arithmético-géométrique...

— On commence par montrer que tous les termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs. C'est une récurrence et il faut l'écrire.
— On passe au logarithme népérien de chaque côté de l'égalité. Dès lors :
$$\ln(w_{n+1}) = \ln\left(\frac{w_n^2}{2}\right) = 2\ln(w_n) - \ln(2)$$
La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = \ln(w_n)$ est donc une suite arithmético-géométrique et on raisonne comme dans la question 3. A savoir :
$$\begin{cases} s_{n+1} & = 2s_n - \ln(2) \\ l & = 2l - \ln(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_{n+1} - l & = 2(s_n - l) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ l = \ln(2) & \quad L_2 \end{cases}$$
Dès lors :
$$s_n - l = 2^n(s_0 - l) \Leftrightarrow s_n = 2^n(\ln(1) - \ln(2)) + \ln(2)$$
ou encore :
$$s_n = \ln(2) - 2^n\ln(2) = \ln(2)\left(1 - 2^n\right) = \ln\left(2^{1-2^n}\right)\text{n } \forall n \in \mathbb{N}$$
Conclusion : $\boxed{w_n = e^{s_n} = 2^{1-2^n} = \frac{2}{2^{2^n}}}$

15. Définition de la limite : On suppose que $\underset{n\to\infty}{lim} u_n = 1$. *Donnons la définition :*
$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0, |u_n - 1| \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leq u_n \leq 1 + \varepsilon$$
16. *Rappelons la définition de deux suites adjacentes :* (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes si, et seulement si elles sont monotones, de monotonies opposées et $\underset{n\to\infty}{lim}(u_n - v_n) = 0$.