Devoir : Révisions d'analyse (2h00)

Le devoir se compose de calculs rapides, de questions de cours sur les suites numériques et d'un sujet issu des oraux de l'agro en 2022. A titre indicatif, on consacrera respectivement 40 mn, 20 mn et 50 mn à chacune de ces parties (il devrait rester 10 mn pour se relire...).
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
L'usage de la calculatrice ***n'est pas*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

Exercice 1 : Calculs rapides et fonctions usuelles

1. Donner le résultat sous forme d'une puissance de 10 : $a = 10^5 \cdot 10^3$, $b = (10^5)^3$, $c = \dfrac{10^5}{10^3}$ et $d = \dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$.
2. Simplifier $a = \sqrt{(-5)^2}$, $b = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ et $c = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.
3. Utiliser la quantité conjuguée pour rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes :
$$a = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \text{ et } b = \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$$
4. On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$. Pour $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes :
$$a(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)},\ b(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ et } c(x) = \frac{f(x)}{f''(x)}$$
5. Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$: $a = \dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$, $b = \ln(0,125)$
6. Même question pour $A = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \cdot + \ln\left(\dfrac{98}{99}\right) + \ln\left(\dfrac{99}{100}\right)$
7. Écrire les nombre suivants le plus simplement possible :
$$a = e^{3\ln(2)},\ b = \ln(\sqrt{e}),\ c = e^{-2\ln(3)}\ ;\ d = e^{\ln(3)-\ln(2)} \text{ et } e = -e^{-\ln(1/2)}$$

Exercice 2 : Études de fonctions - parité

8. Les fonctions suivantes sont paires ou impaires. Justifier votre réponse dans chaque cas :
$$f_1 : x \longmapsto \ln\left(\frac{2022+x}{2022-x}\right)\ ;\ f_2 : x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})\ ;\ f_3 : x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
9. Étudier la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f_3.

Exercice 3 : Sommes usuelles

10. Donner la valeur des sommes suivantes :
$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} 2^k\ ;\ S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\ S_3 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{2^k}\ ;\ S_4 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}$$
11. Rappeler la formule de Pascal : $\dbinom{k}{p} + \dbinom{k}{p+1} = \cdots$

    Application : Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, $\forall 0 \leq p \leq n$

Cours sur les suites numériques :

12. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

13. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $w_0 = 2$. Déterminer w_{100}.

14. On considère la même suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais on suppose cette fois que $w_0 = 1$. Calculer w_1 et w_2 puis exprimer w_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
✐ *On pourra penser à faire apparaître une suite arithmético-géométrique*

15. Définition de la limite : On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$. Compléter la proposition suivante : $\forall\varepsilon > 0, \cdots$

16. Rappeler la définition de deux suites adjacentes.

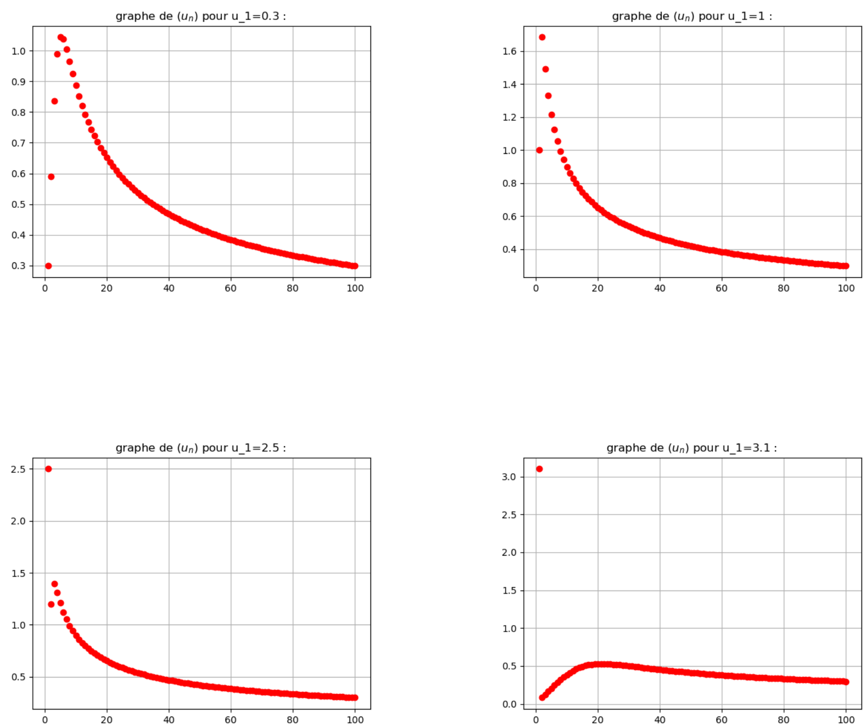
Sujet d'oral Agro-véto

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_1 \in]0;\pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\sin(u_n)$.

17. Montrer que $u_2 \in]0, 2[\subset]0, \pi[$ et pour tout $n \geq 3$: $0 < u_n < \dfrac{\pi}{2}$.

18. Déterminer le seul réel vers lequel la suite (u_n) peut converger.

19. Écrire un fonction Python d'arguments $u1$ et n et qui renvoie la liste des n premiers termes de la suite (u_n).
Montrer comment utiliser cette fonction pour les représenter graphiquement.
A titre d'exemple, voilà ce que retourne cette fonction pour $n = 100$ et plusieurs valeurs de u_1 :



Émettre une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n).

20. Montrer que, s'il existe $n_0 \geq 4$, tel que $u_{n_0} \leq u_{n_0-1}$, alors la suite décroît strictement à partir du rang n_0.
On pourra pour cela, utiliser une expression de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *en fonction de* u_n *et* u_{n-1}.

21. Est-il possible que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n > u_{n-1}$?

22. Conclure en établissant la convergence de (u_n).

23. Écrire un script Python permettant d'émettre une conjecture sur la limite de $\sqrt{n}u_n$.
Remarque : Pour $n = 10$, 100 et 1000, il renvoie : 2.86, 2.98 et 2.998.

24. On pose pour tout $n \geq 1$, $x_n = \dfrac{u_n}{n}$ et on rappelle que $sin(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)$
Montrer que $\sin(u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^3}{6}$ et en déduire que :
$(x_{n+1} - x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{-n^2}{6}x_n^3$, puis que $\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{3}$

25. On admet que le résultat précédent permet d'établir la relation suivante : $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{3}$.
Donner grâce à ce résultat un équivalent de $\dfrac{1}{nu_n^2}$ et vérifier la conjecture faite à la question 23 en pensant à appliquer la formule des sommes de Riemann.