# Devoir maison 1 : Planche 1 - TD2 Fonctions

## Planche 1 :

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9}$ et la suite récurrente $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$f(x_n) = x_{n+1},\ x_0 \in ]0,1[$$

① Montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution $c$ sur l'intervalle $]0, 1/2[$.

② Étudier la monotonie de la suite $(x_n)$.

③ Étudier la convergence de la suite $(x_n)$ et écrire une fonction Python permettant le calcul de $x_n$ pour toute valeur entière de $n$ entrée par l'utilisateur.

④ Donner une valeur approchée à $\varepsilon$ près de la limite de $(x_n)$ en utilisant l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous :

**Algorithme de dichotomie**
On considère une fonction $f$ continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que $f$ s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note $\alpha$
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel $k$ on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites $(a_k)$ et $(b_k)$ convergent toutes les deux vers $\alpha$ en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier $k$ est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors $a_k$ et $b_k$ sont des valeurs approchées à $\varepsilon$ près de $\alpha$.