PROBABILITES

Planche 1

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité continue noté φ et de fonction de répartition notée ϕ).
On pose $Z = max(X, Y)$. On admet que Z est bien une variable aléatoire définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
On se propose de déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.

① Écrire une fonction Python permettant d'estimer $\sqrt{\pi}\mathbb{E}(Z)$.
On rappelle à toute fin utile - même si ce n'est pas la seul façon de procéder - que la fonction `random.normal(mu, sigma, n)` *du module* `numpy` *génère n variables aléatoires indépendantes de loi normale d'espérance* `mu` *et d'écart-type* `sigma`.

② Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité en fonction de φ et ϕ.

③ Rappeler la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ et en déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$.

④ a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y' + xy = 0$$

et montrer que la fonction φ en est solution.

b) En déduire que :

$$\int_0^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

c) Montrer alors que Z admet une espérance et donner sa valeur.

⑤ a) Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b) En déduire que Z admet une variance et la déterminer.

Planche 2 :

On rappelle que, si V et W sont deux variable aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f_V et f_W alors la variable aléatoire $V+W$ admet une densité h définie par $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_V(t)f_W(x-t)dt$.

① Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$ et soit λ un réel strictement positif. On note $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Justifier que X est bien définie et vérifier que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

On s'intéresse à la vitre d'un abris bus dans un lieu sensible. Lorsque celle-ci est cassée, on la remplace immédiatement. On s'intéresse au nombre de vitres cassées au bout d'un temps t (en heures).
Pour $n \geq 1$, on note X_n la durée de vie en heures de la n-ième vitre de cet abris bus. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On commence à observer au temps 0 et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose S_n le temps au bout duquel en heures, la vitre est cassée pour la n-ième fois de cet abris bus.

② Exprimer S_n en fonction des variables (X_n), puis démontrer qu'une densité de la variable S_n est définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

③ a) Écrire une fonction `nb_cassees(t, lamb)` qui prend en arguments deux flottants strictement positifs `t` et `lamb`, qui simule l'expérience décrite ci-dessus et qui retourne le nombre de vitres cassées dans l'intervalle $[0,t]$ où `lamb` est le paramètre de la loi exponentielle.

b) Écrire une fonction `moyenne(t, lamb)` qui estime le nombre moyen de vitres cassées dans l'intervalle $[0,t]$.

④ Pour $t \geq 0$, on note N_t le nombre de bris de vitres observés dans l'intervalle $[0,t]$.
Exprimer l'événement $(N_t = 0)$ en fonction de X_1, puis calculer la probabilité de l'événement $(N_t = 0)$.

⑤ a) Pour $n \in \mathbb{N}$, interpréter l'événement $(N_t \geq n)$, puis l'écrire à l'aide de la variable S_n.

b) Comment se déduit alors $\mathbb{P}(N_t = n)$? Reconnaître, après calculs, que N_t suit une loi de Poisson, dont on précisera le paramètre.

⑥ Supposons que lorsque la vitre est cassée, celle-ci est remplacée au bout de 24 heures. Si on désigne cette fois par T_n le temps au bout duquel, en heures, la vitre est cassée pour la n-ième fois de cet abris bus, comment s'exprime T_n en fonction des variables (X_n) et de n ? En déduire une densité de la variable T_n à partir de f_n.

Planche 3 :

On rappelle que, si U et V sont deux variable aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f_U et f_V alors la variable aléatoire $U+V$ admet une densité h définie par $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-t)f_Y(t)dt$.
Le principe de la datation au carbone 14 est d'estimer la proportion restante de carbone 14 dans un élément physique inerte (matériau ou système biologique non vivant) par rapport à une proportion connue et constante correspondant à celle de l'atmosphère qui détermine la proportion initiale au temps $(t = 0)$ lors de la construction du matériau ou lors du cycle vivant du système biologique. Pour estimer la proportion résiduelle de carbone 14 (C_{14}) on prélève un échantillon et on procède au comptage sur une période de quelques jours du nombre de désintégrations d'atomes de carbone 14 réalisées pendant cette période. La proportion stable dans l'atmosphère de carbone 14 étant égale à $N_0 = 6,8 \times 10^{10}$ atomes de carbone 14 par gramme de carbone. Pour chaque atome de C_{14} à l'instant $t = 0$, on note X_i la variable aléatoire qui donne la durée de vie du i-ième atome de C_{14}, X_i suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3,94 \times 10^{-12} s^{-1}$. Les atomes de C_{14} se comportent de manière indépendante.

① a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer la loi de $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.
b) En déduire une fonction Python qui simule une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

② Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.
a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = \max(X, Y)$.
b) Montrer que Z est une variable à densité et déterminer sa densité.

③ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre 2λ et λ respectivement. Montrer que $X + Y$ suit la même loi que la variable aléatoire Z.

④ On souhaite estimer le nombre N_t d'atomes C_{14} au temps $t > 0$. On compte sur une durée de trois jours, $\delta = 3$, le nombre de désintégrations n. On pose pour tout $i \in [\![1, N_t]\!]$, $Y_{i,t}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ième atome C_{14} s'est désintégré sur la période $[t, t+\delta]$, 0 sinon.
a) Déterminer pour tout $i \in [\![1, N_t]\!]$ la loi de $Y_{i,t}$, son espérance μ et sa variance σ^2.
b) Justifier que $\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{n}{N_t} - \mu\right| \geqslant 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N_t}}\right) \approx 0,05$.

c) On considère que $\dfrac{n}{\mu}$ est un estimateur de la quantité N_t et on pose $\mathcal{E} = \dfrac{N_t - \frac{n}{\mu}}{N_t}$. $\mathcal{E}$ représente l'erreur relative d'estimation de N_t par l'observation de la valeur de $\frac{n}{\mu}$.
On admet que $\mathrm{P}\left(|\mathcal{E}| \leqslant 1,96\frac{\sqrt{\exp(\lambda t)}}{\sqrt{N_0\lambda\delta}}\right) \geqslant 0,95$.
Qu'elle doit être le temps maximal t en années pour avoir l'erreur relative $\mathcal{E}$ au plus égale à 5% sur un échantillon d'un gramme avec une probabilité au moins égale à 0,95 ?

Planche 4 :

On rappelle le résultat suivant : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, telles que X admet une densité notée f_X et Y admet une densité notée f_Y, alors la variable aléatoire $X+Y$ admet pour densité la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$$

① a) Démontrer que pour tout entier naturel k, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge et vaut $k\,!$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ \dfrac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

On dira qu'une variable aléatoire admettant f_n comme densité suit la loi gamma de paramètre n.

On précise que l'instruction `numpy.random.gamma(n, 1)` renvoie un nombre aléatoire strictement positif suivant la loi gamma de paramètre n.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, telles que X suit la loi gamma de paramètre m, et Y suit la loi gamma de paramètre n (avec m et n deux entiers naturels).

On note aussi $T = \dfrac{X}{Y}$ et $Z = \dfrac{X}{X+Y}$.

② Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument des entiers m et n, simule un grand nombre de fois la variable aléatoire Z et renvoie une valeur approchée de son espérance.

③ Exprimer la fonction de répartition de $\ln(X)$ en fonction de celle de X.
En déduire que $\ln(X)$ est une variable aléatoire à densité, et qu'elle admet pour densité la fonction g définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \frac{e^{mt}e^{-e^t}}{(m-1)!}.$$

Donner de même une densité de la variable aléatoire : $-\ln(Y)$.

④ a) Soit $\alpha > 0$ et k un entier naturel. En utilisant le changement de variable : $u = \alpha e^t$. démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{kt}e^{-\alpha e^t} dt$ converge, et vant $\frac{(k-1)!}{\alpha^k}$.

b) Démontrer que la variable aléatoire $\ln(X) - \ln(Y)$ admet pour densité la fonction j définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, j(x) = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!} \frac{e^{-nx}}{(1+e^{-x})^{m+n}}.$$

⑤ Exprimer la fonction de répartition de la variable aléatoire T en fonction de celle de $\ln(X) - \ln(Y)$. En déduire que T est une variable aléatoire à densité, et en donner une densité.

⑥ Exprimer la fonction de répartition de la variable aléatoire Z en fonction de celle de T. En déduire que Z est une variable aléatoire à densité, et en donner une densité.

Planche 5 :

On considère une pièce qui fait Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec probabilité $q = 1 - p$.
Soit n un entier non nul fixé.
On considère n joueurs qui lancent chacun la pièce jusqu'à obtenir Pile. Le(s) gagnant(s) sont désignés comme ceux qui ont fait le moins de lancers.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose X_i le nombre de lancers du i-ième joueur, et on note N le nombre de gagnants.

① Quelle est la loi de X_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$?
Rappeler son espérance et sa variance.

② Calculer pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_i > j)$.

③ On note $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
Calculer $\mathbb{P}(Y > j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
En déduire la loi de Y, son espérance et sa variance.

④ Écrire une fonction Python `NbMin(L)` prenant en argument une liste `L` et renvoyant le nombre de fois où la valeur minimale apparaît dans la liste `L`.

⑤ En déduire une fonction Python `N(n,p)` qui, prenant en argument la valeur de n et p, simule l'expérience aléatoire décrite et renvoie la valeur de N.

⑥ Calculer $\mathbb{P}(N = n)$.

⑦ Montrer que :
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(N = k) = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1 - q^n}.$$

⑧ En déduire l'espérance de N et la variance de N.

⑨ Vérifier la valeur de $\mathbb{E}(N)$ à l'aide d'estimations construites grâce à la fonction `N` de la question 5.

Planche 6 :

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant N boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N.
On procède à des tirages successifs d'une boule avec remise de la boule dans l'urne avant le tirage suivant.
On note pour tout $k \geqslant 1$, X_k le numéro obtenu au k-ième tirage, et Z_k le nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

① a) Écrire une fonction Python `NbDiff(L)` prenant en argument une liste `L` et qui renvoie le nombre d'éléments distincts présents dans cette liste.

b) Écrire une fonction Python `Z(N,k)` qui, prenant en arguments les valeurs de N et k, renvoie une simulation de Z_k.

c) Estimer l'espérance de Z_k à l'aide de votre programme, et conjecturer son comportement lorsque :

i. $N = 10$ et $k \to +\infty$

ii. $k = 10$ et $N \to +\infty$

iii. $N = k$ et $N \to +\infty$

② Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1 et la loi de la variable aléatoire Z_2.
En déduire $\mathbb{E}[Z_1]$ et $\mathbb{E}[Z_2]$.

③ Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathbb{P}(Z_k = k)$.

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, N]\!]$: $\mathbb{P}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{N}\mathbb{P}(Z_k = \ell) + \frac{N-\ell+1}{N}\mathbb{P}(Z_k = \ell - 1)$.

c) En déduire : $\mathbb{E}[Z_{k+1}] = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}[Z_k] + 1$.

④ Montrer alors que pour tout $k \geqslant 1$

$$\mathbb{E}(Z_k) = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^k\right).$$

⑤ Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Z_k)$ dans les trois cas suivants, en comparant avec vos résultats numériques de la question 1(c)

a) lorsque N est fixé et $k \to +\infty$

b) lorsque k est fixé et $N \to +\infty$

c) lorsque $N = k$ et $N \to +\infty$

Planche 7 :

On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On tire successivement une boule dans l'urne puis :

— si on tire une boule blanche, on remet la boule blanche dans l'urne ainsi qu'une autre boule blanche

— si on tire une boule noire, on remet la boule noire dans l'urne et le jeu s'arrête.

On suppose que les boules sont indiscernables au toucher. On note N le nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

On considère aussi une famille de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes, toutes indépendantes de N, et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \ldots, X_N)$.

Par exemple, si $N = 2$*, alors* $T = \max(X_1, X_2)$ *; si* $N = 4$*, alors* $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$*.*

① a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \mathbb{P}(N = k) = \dfrac{1}{k(k-1)}$.

b) La variable N admet-elle une espérance ?

② a) Si U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, montrer que $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

b) Écrire une fonction Python `T` prenant en argument un réel strictement positif ℓ et qui simule la variable T avec ℓ pour valeur de λ.

c) Estimer à l'aide de Python l'espérance de T pour $\lambda = 1$.

③ Soit $x \in [0, 1[$.

a) Montrer que, pour tout $t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k + \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$.

b) En déduire que $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{x^k}{k} + \int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

c) Par encadrement, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$ puis que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

d) Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \dfrac{x^k}{k(k-1)}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k(k-1)} = \varphi(x)$ où φ est la fonction définie sur $[0, 1[$ par $\varphi(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.

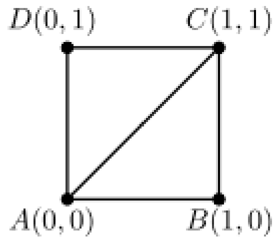
④ Soient $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\mathbb{P}_{(N=k)}(T \leq x)$ puis en déduire que $\mathbb{P}(T \leq x) = \varphi(F(x))$ où F est la fonction de répartition de X_1.

⑤ On admet que T est une variable à densité. Montrer qu'une densité de T est donnée par la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

⑥ Justifier que T admet une espérance puis calculer $\mathbb{E}(T)$. Est-ce cohérent avec la conjecture effectuée à la question 2.(c) ?

Planche 8 :

On considère une particule se déplaçant aléatoirement sur les arêtes de la figure ci-contre délimitée par les points $A(0,0), B(1,0), C(1,1)$ et $D(0,1)$. À l'instant $n = 0$, elle se situe en A et à chaque étape, elle se déplace aléatoirement et de manière équiprobable vers l'un des sommets qu'elle peut atteindre en une étape.
Par exemple, du point A, la particule peut aller en B, C ou D mais du point D, elle ne peut aller qu'en A ou C (et pas en B).
Pour tout entier naturel n, on note respectivement A_n, B_n, C_n et D_n les événements : « À l'instant n, la particule se situe en A (resp. en B, en C, en D) ».
On note enfin pour tout entier naturel n : $a_n = P(A_n)$,
$b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$ et $d_n = P(D_n)$.



1. Écrire une fonction Python `positionA(n)` permettant de simuler cette expérience et qui renvoie la fréquence de passage de la particule au point A jusqu'à l'étape n. Estimer ainsi $\underset{n\to\infty}{lim}\, a_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et d_n.
3. Étude des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   a) En remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = b_n$, démontrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et déterminer b_n en fonction n.
   b) En déduire l'expression de $a_{n+1} + c_{n+1}$ en fonction de n.
   c) Montrer que la suite $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire son expression en fonction de n.
   d) En déduire les expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de n.
4. Soient maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n et Y_n des variables aléatoires réelles correspondant respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée de la particule à l'instant n.
   a) Déterminer les lois de ces variables aléatoires.
   b) X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
   c) Déterminer $Cov(X_n, Y_n)$.
5. Pour tout entier naturel n, on note maintenant $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.
   b) On admet que $M^4 - \frac{7}{9}M^2 - \frac{2}{9}M = 0$. En déduire que chaque valeur propre λ de M vérifie $\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0$.
   c) Justifier que M est diagonalisable puis la diagonaliser.
   d) Proposer alors une démarche (sans détailler les calculs) pour retrouver le résultat de la question 3.

Planche 9 :

Dans tout l'exercice les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. *Si* X *est une variable aléatoire, on notera* $\mathbb{E}(X)$ *son espérance.*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

① Montrer que f est une densité de probabilité.
On considère désormais une variable aléatoire X à densité, dont f est une densité et $Y = X - \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

② Déterminer la fonction de répartition de X.

③ a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que $V = \dfrac{1}{1-U}$ suit la même loi que X.
b) Écrire une fonction Python `X` ne prenant aucun argument et simulant la variable X.
c) Écrire une fonction Python `Y` ne prenant aucun argument et simulant la variable Y.
d) Estimer l'espérance de Y à l'aide de Python.

④ Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$,

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(k \leq X \leq k + x) = S(x)$$

où

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

On admet que S est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

⑤ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \dfrac{1}{t}$.
b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, que l'on notera γ.

⑥ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+t} \right) dt$

⑦ En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \displaystyle\int_0^1 S(t)dt - u_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

⑧ En conclure que $\displaystyle\int_0^1 S(t)dt = \gamma$.

⑨ On admet que Y est une variable aléatoire à densité.
Montrer que Y admet une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = 1 - \gamma$

Planche 10 :

① Soit $q \in]0,1[$. On pose $S_{m,n}(q) = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} q^{k-m}$ avec $0 \leq m \leq n$.

a) Démontrer que $(1-q)S_{m,n}(q) = S_{m-1,n-1}(q) - \binom{n}{m} q^{n+1-m}$, avec $1 \leq m \leq n$.

b) En déduire de proche en proche la convergence de la série $\sum_{k \geq m} \binom{k}{m} q^{k-m}$.

c) On pose $S_m(q) = \sum_{k \geq m} \binom{k}{m} q^{k-m}$. Démontrer que $(1-q)S_m(q) = S_{m-1}(q)$.

d) En déduire la valeur de $S_m(q)$ pour tout entier naturel m.

② On lance indéfiniment une pièce de monnaie qui amène Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $q = 1-p$.
On note X_m la VAR égale au rang d'arrivée du m-ième Pile.

a) Simuler à l'aide de Python X_m et en déduire une approximation de son éventuelle espérance.

b) Déterminer la loi de X_m. On appelle loi de Pascal et on note $P(m,p)$ la loi suivie par X_m.

c) Démontrer que X_m admet une espérance et calculez-la.

d) Démontrer que la VAR $Y_m = X_m(X_m - 1)$ admet une espérance. La calculer et en déduire que X_m admet une variance qu'on déterminera.

③ a) On tire avec remise une carte d'un jeu de 52 cartes et on note Y la VAR égale au nombre de tirages effectués lorsque l'on obtient, pourla 4-ième fois un roi. Donner la loi de Y et ses moments d'ordre 1 et 2.

b) Une urne contient des jetons numérotés de 1 à $2n$. On les extrait un à un avec remise, jusqu'à obtenir n numéros pairs. Soit Z la VAR égale au nombre de tirages à effectuer. Donner la loi de Z et ses moments d'ordre 1 et 2.

Planche 11 :

Des chien chassent des mulots. La probabilité pour qu'ils attrapent un mulot est p où $p \in]0, 1|$. X est la variable aléatoire égale au nombre d'essais pour qu'un chien A attrape son premier mulot. Les différents essais de ce chien sont supposés indépendants.

① Reconnaitre la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Ensuite un deuxième chien B essayera d'attraper les mulots lors d'exactement X essais. Ainsi, si A attrape son premier mulot à l'issu de son n-ième essai, B poursuivra n mulots.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de mulots attrapés au cours des essais de B.

② Écrire en Python une fonction `Essais` qui prend en entrée la valeur de p et renvoie une simulation de (X, Y).

③ Pour tout entier naturel n non nul, déterminer $\mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k)$ pour tout entier naturel k.

④ On admettra pour cette question que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^{n-k}$ converge et

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel k non nul, $\mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$ où $q = 1 - p$ et déterminer $\mathbb{P}(Y = 0)$.

b) Écrire un script Python donnant une valeur approchée de $\mathbb{E}(Y)$.

c) Démontrer que Y admet une espérance et déterminer $\mathbb{E}(Y)$.
On admet que Y admet une variance et que $\mathbb{V}(Y) = 2q$.

⑤ a) Justifier que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
Peut-on alors affirmer que $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$?

b) Déterminer $\mathbb{E}(XY)$.

c) En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$

d) A l'aide de la fonction `Essais` définie au début du sujet, représenter le nuage de points associé à 100 réalisations de (X, Y).
Cela conforte-t-il le résultat obtenu en 5.c) ?

Planche 15 :

Une variable aléatoire réelle X est dite symétrique quand X et $-X$ sont même loi.
Soit V une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$ et indépendante de V.

① a) Démontrer que la variable aléatoire $T = 2V - 1$ est une variable aléatoire symétrique.

b) Écrire une fonction `SimulT(n)` qui prend en entrée un entier naturel n non nul et renvoie une liste de longueur n contenant n réalisations de T.

② a) Posons $W = 2 - \ln(1 - U)$.
Démontrer que W est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de W.

b) Écrire une fonction `simulW(n)` qui prend en entrée un entier naturel n non nul et renvoir une liste de longueur n contenant n réalisations de W.

③ Posons $Z = TW$.

a) Écrire un script Python permettant de tracer la répartition de n réalisations de Z sur une partition en 20 intervalles de longueur égale de $[\min(Z), \max(Z)]$.

b) Démontrer que Z est une variable aléatoire symétrique.

④ Soit X une variable aléatoire symétrique.

a) Exprimer $\mathbb{P}(X \leq 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X = 0)$.

b) Si f est une fonction numérique impaire, montrer alors que $Y = f(X)$ est symétrique.

c) Si Y est une variable aléatoire discrète symétrique et indépendantes de X, montrer alors que $X + Y$ est symétrique.

Planche 16 :

Un magasin possède une caisse, toutes les personnes qui sortent du magasin doivent passer par cette caisse y compris si le client n'achète pas d'article. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire réelle égale au nombre d'articles achetés par le k-ième client. On suppose que ces variables sont mutuellement indépendantes et suivent une loi de Poisson de paramètre μ.
On note N le nombre aléatoire de clients qui passent par la caisse au cours de la première heure, N suit une loi de Poisson de paramètre λ et est indépendantes des X_k.
On souhaite étudier le nombre X d'articles passant par cette caisse durant la première heure.

1. Exprimer X en fonction de N et des X_i.
2. Écrire une fonction Python `X` qui prend en entrée l pour λ et m pour μ et qui simule la variable aléatoire X. On pourra utiliser pour cela la fonction `poisson` du module `numpy.random`.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}_{(N=0)}(X = n)$.
4. Démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $X_1 + \cdots X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $k\mu$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k!n!} e^{-(\lambda+k\mu)}$
6. Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \lambda\mu$.
   ✐ ON admettra l'existe de $\mathbb{E}(X)$ et on pourra procéder sans justification à une permutation de deux sommes infinies.
7. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\mathbb{P}(X = 0) = \exp(\lambda(e^{-\mu} - 1)) \text{ et } \mathbb{P}(X = n) = \frac{\mu^n e^{-\lambda}}{n!} f_n(\lambda e^{-\mu})$$
   où $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^n \frac{x^k}{k!}$. On pose aussi $f_0(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
8. Exprimer f_0 et f_1 à l'aides des fonctions usuelles.
9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f_{n+1}(x) = x + \sum_{i=0}^{n} x \binom{n}{i} f_i(x)$$
   ✐*indication :* ON pourra utiliser les changement de variable $l = k - 1$.
10. En déduire une expression de la fonction f_2.
11. Écrire une fonction `f` qui prend en entrée un entier n et un réel x et qui renvoie la valeur de $f_n(x)$. On pourra utiliser la fonction `binom` du module `scipy.special`.
12. Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction Python qui prend en entrée deux réels λ et μ et un entier n et qui renvoir $\mathbb{P}(X = n)$.
    ✐ On pourra utiliser la fonction `factorial` du module `scipy.special`.

Planche 17 :

On suppose que chaque boîte de céréales de la marque Miéléa contient une figurine représentant un mathématicien célèbre choisie dans une liste fixée de n mathématiciens ($n \geq 2$).
Etant donné un mathématicien de la liste, lorsqu'on achète une boite, la probabilité qu'elle contienne sa figurine vaut $1/n$.
On achète n boites de céréales de cette marque, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $X_{k,n}$ le nombre de figurines du k-ème mathématicien obtenues et $Y_n = max\{X_{k,n}, k \in [\![1, n]\!]\}$.

① Quelle est la loi commune aux $X_{k,n}$?
Déterminer, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $\underset{n\to\infty}{lim}\, \mathbb{P}(X_{k,n} = r)$ quand n tend vers l'infini.

② a) Écrire une fonction Python qui simule cette expérience aléatoire et renvoie la valeur de Y_n.
b) Utiliser la fonction précédente pour écrire un script qui calcul une valeur approchée de $\mathbb{E}(Y_n)$ et la tester pour $n = 1000$.

③ a) Démontrer que pour tout x réel : $1 + x \leq e^x$.
b) En déduire que pour tous t et x réels, $e^x + (tY_n - x)e^x \leq e^{tY_n}$
c) En appliquant l'inégalité précédente pour une valeur de x bien choisie, montrer que pour tout réel t,

$$e^{\mathbb{E}(tY_n)} \leq \mathbb{E}\left(e^{tY_n}\right)$$

④ Démontrer par récurrence sur k entier naturel non nul que, si $A_1, \cdots, A_k$ sont des événements,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$$

⑤ On note X_n une variable aléatoire suivant la même loi que les $X_{k,n}$.
a) Démontrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(Y_n = k) \subset (X_{1,n} = k) \cup \cdots \cup (X_{n,n} = k)$.
b) En utilisant le théorème de transfert, les questions 4 et 5.a), en déduire que pour tout t réel :

$$\mathbb{E}\left(e^{tY_n}\right) \leq n\mathbb{E}\left(e^{tX_n}\right)$$

c) Pour tout t réel, calculer $\mathbb{E}\left(e^{tX_n}\right)$.
En déduire, en utilisant l'inégalité de la question 3.c) que, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}(Y_n) \leq \frac{\ln(n) + n\ln\left(1 + \frac{e^t - 1}{n}\right)}{t}$$

d) Démontrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$.
En appliquant l'inégalité obtenue dans la question précédente pour une valeur particulière de t, montrer que :

$$\mathbb{E}(Y_n) \leq \frac{2\ln(n)}{\ln(1 + \ln(n))}$$

Planche 18 :

Soit n un entier naturel non nul, x un réel positif et $p \in]0,1[$.
Soit $q = 1 - p$.
Soit S_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et p.

① A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) \leq \frac{p(1-p)}{nx^2}$$

② Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument les valeurs de n, p et x, réalise un grand nombre de simulations de la variable aléatoire S_n et renvoie une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right)$.

③ Utiliser la fonction précédente avec $p = 0.5$, $x = 0.1$ et $n = 100$, puis $n = 200$.
Commenter l'inégalité obtenue à la première question.

④ Démontrer que : $\forall \lambda > 0$, $\mathbb{P}(S_n - np \geq x) \leq \dfrac{\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - np)})}{e^{\lambda nx}}$

⑤ Démontrer que : $\forall \lambda > 0$, $\mathbb{E}\left(e^{\lambda(S_n-np)}\right) = \left(pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p}\right)^n$.

⑥ On admet l'inégalité suivante : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t \leq e^{t^2} + t$.
Démontrer alors que :

$$\forall \lambda > 0, \mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq e^{n\lambda^2 - \lambda nx}$$

et en déduire que $\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq e^{-nx^2/4}$

⑦ Expliquer comment on montrerait de la même manière que $\mathbb{P}(S_n - np \leq -nx) \leq e^{-nx^2/4}$.

⑧ En déduire l'inégalité suivante : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) \leq 2e^{-nx^2/4}$.
Que pensez-vous de cette inégalité en la comparant à celle obtenue à la question 1 ?

Planche 19 :

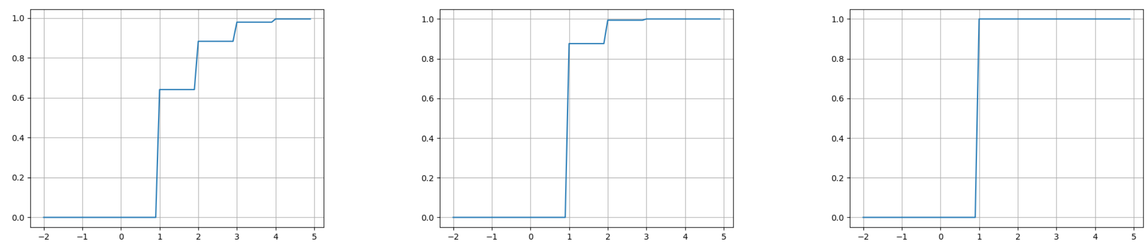
Toutes les variables aléatoires introduites dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que pour tout n : $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,r]\!]}$ où r est un entier ≥ 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \min(X_1, \cdots X_n)$.
Pour les questions informatiques, on importe les modules ci-dessous avec leur alias habituel : `import numpy.random as rd`, `matplotlib.pyplot as plt`, `numpy as np`. Enfin, on rappelle que `rd.randint(a, b, (p, q))` renvoie une matrice (un tableau numpy) de taille $p \times q$ dans laquelle chaque élément est une réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{U}_{[\![a,b]\!]}$.

① a) Au sein de la fonction ci-dessous, que représentent pour N suffisamment grand, les éléments de la liste `P` ?

```
def simulation(r, n, N):
    M = rd.randint(1, r+1, (N, n))
    Y = [min(M[i,:]) for i in range(N)]
    P = [len([y for y in Y if y==i])/N for i in range(1, r+1)]
    return P, Y
```

b) Après exécution du script ci-dessous, on obtient les graphiques ci-dessous :

```
X = np.arange(-2, 5, 0.1) # [-2, -1.9, ..., 4.9]
r, N = 10, 1000
for n in [10, 20, 1000]:
    P, Y = simulation(r, n, N)
    F = [len([y for y in Y if y<=e])/N for e in X]
    plt.figure("Freq.␣cumulées␣pour␣n␣="+str(n))
    plt.plot(X, F)
    plt.show()
```



Que conjecturez-vous quand à la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ (dans le cas où $r = 10$) ?

② Soir r un entier supérieur ou égal à 2.

a) Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Calculer $\mathbb{P}(Y_n \geq k)$ puis $\mathbb{P}(Y_n = k)$.

b) En déduire que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

③ a) Soit r entier nature ≥ 2. On considère Z une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[\![1, r]\!]$.

Montrer que $\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(Z \geq k)$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, en utilisant les sommes de Riemann, un équivalent quant r tend vers $+\infty$ de $\mathbb{E}(Y_n)$.

④ Soit $N \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, avec $0 < p < 1$, indépendante des (X_n). On définit $Y = min(X_1, \cdots, X_N)$, c'est-à-dire que pour tout $\omega \in \Omega$, : $Y(\Omega) = min(X_1(\omega), \cdots, X_{N(\omega)}(\omega))$.

Et on note $q = 1 - p$ et $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_k = \dfrac{r - k + 1}{r}$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(Y \geq k) = \dfrac{p\alpha_k}{1 - \alpha_k q}$.

b) En procédant comme dans la question 3., en déduire que $\mathbb{E}(Y) \underset{r \to +\infty}{\sim} -\dfrac{rp}{q}\left(1 + \dfrac{\ln(p)}{q}\right)$.

Planche 20 :

① Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Donner l'espérance de X.

b) Calculer $\mathbb{P}(X > x)$ pour tout $x > 0$.

c) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathbb{P}(X > x)$.

② Soit φ et ϕ les fonctions :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < e \\ e \cdot \dfrac{1 + \ln(t)}{(t\ln(t))^2} & \text{si } t \geq e \end{cases} \quad \text{et } \phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < e \\ 1 - \dfrac{e}{t\ln(t)} & \text{si } t \geq e \end{cases}$$

a) Calculer ϕ'. Démontrer que φ est une fonction densité et que ϕ est la fonction de répartition d'une variable de densité φ.

b) Écrire une fonction Python de paramètre $a \in]0, 1|$ qui trace la courbe de ϕ sur l'intervalle $[0, \phi^{-1}(a)]$.

On considère dans la suite T une variable aléatoire de densité φ et on pose $X = T - e$.

c) Vérifier que X est une densité continue sur $\mathbb{R}_+$.

d) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}dt$ est divergente.

e) Comparer $t\varphi(t)$ et $\dfrac{e}{t\ln(t)}$ pour tout $t \geq e$. Est-ce que les variables T et X admettent une espérance ?

f) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathbb{P}(X > x)$.

③ Soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f et un espérance. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Le but de cette partie est de démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathbb{P}(X > x) = 0$ et que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt$

a) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} tf(t)dt$?

b) Comparer $x\mathbb{P}(X > x)$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)dt$ pour tout $x > 0$. Que peut-on en déduire ?

c) Soit $x > 0$. Intégrer par partie $\displaystyle\int_0^x \mathbb{P}(X > t)dt$. Que peut-on en déduire ?

Planche 21 :

On admettra sans le démontrer le résultat suivant : Si G est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, croissante sur $\mathbb{R}$ et telle que $\underset{x\to-\infty}{lim} G(x) = 0$ et $\underset{x\to+\infty}{lim} G(x) = 1$, alors il existe une variable aléatoire à densité dont G est la fonction de répartition.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

① Écrire une fonction Python de paramètres a, b et n qui renvoie une liste de n valeurs comprises entre a et b pour une variable aléatoire suivant la loi centrée réduite.
On utilisera l'instruction random.randn() du module numpy.
Donner la valeur moyenne obtenue pour $a = 0$, $b = 1/2$ et $n = 10^4$.

② On considère X une var suivant la loi normale d'espérance μ et de variance $\sigma^2 > 0$ et la fonction $F_{\mu,\sigma}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{\mu,\sigma}(x) = \mathbb{P}_{(a<X\leq b)}(X \leq x)$$

On note ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on pose $U = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

a) Donner la loi de U. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X \leq x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)$.

b) Montrer que $F_{\mu,\sigma}$ est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

③ On considère une variable aléatoire Y admettant $F_{0,1}$ comme fonction de répartition.

a) Donner une densité de Y.

b) Démontrer que Y admet un espérance et qu'elle peut s'écrire :

$$\mathbb{E}(Y) = C\int_a^b te^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

où C est une constante que l'on exprimera à l'aide de la fonction ϕ et des réels a et b.
En déduire une expression de $\mathbb{E}(Y)$ en calculant l'intégrale.
Pour $a = 0$, $b = 1/2$, comparer avec le résultat obtenu à la question 1. On donne $\phi(1/2) = 0.69146$.

c) Quelle est la limite de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque a tend vers $-\infty$?

d) Quelle est la limite de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque b tend vers $+\infty$?

④ Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On considère Z une variable admettant $F_{\mu,\sigma}$ pour fonction de répartition.
On pose $Y' = \dfrac{Z-\mu}{\sigma}$
Donner la fonction de répartition de Y'. En déduire l'expression de Y' puis celle de Z à l'aide des questions 2.b) et 3.b).

Planche 22 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(T_1, T_2, \cdots, T_n)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. On note pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i = T_i^2$ et $H_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On souhaite montrer que pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}(H_n - \mathbb{E}(H_n) \geq 2\sqrt{nt} + 2t) \leq e^{-t} \qquad (E)$$

① a) Écrire une fonction `simule` en Python qui prend en entrée un entier n et qui simule la variable aléatoire H_n.

b) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i admet une espérance et déterminer sa valeur.

c) En déduire que H_n admet une espérance et qu'elle vaut n.

d) A l'aide de la question 1.a), donner une estimation pour $t = 1, 2, 3$ et $n = 100$ de $\mathbb{P}(H_n - \mathbb{E}(H_n) \geq 2\sqrt{nt} + 2t)$ ainsi que la valeur de $exp(-t)$.

② a) Soit $u \in [0, 1/2[$ et $i \in [\![1,n]\!]$. Montrer que la variable aléatoire $exp(u(X_i - 1))$ admet une espérance et que cette espérance vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1-2u}}e^{-u}$.

b) En déduire que pour tout $u \in [0, 1/2[$, $exp(u(H_n - n))$ admet une espérance et sa valeur.

c) Soient $u \in [0, 1/2[$. On note $\psi(u) = \ln(\mathbb{E}(exp(u(H_n - n))))$. Simplifier l'expression de $\psi(u)$.

d) Montrer que pour tout $u \in [0, 1/2[$, $\psi(u) \leq n\dfrac{u^2}{1-2u}$.

e) Utiliser la question précédente pour montrer que pour tout $u \in [0, 1/2[$ et tout $\lambda > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(H_n - n \geq n\lambda) \leq exp\left(-n\left(u\lambda - \frac{u^2}{1-2u}\right)\right)$$

f) Soit $\lambda > 0$. Justifier que $u_m = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{2\lambda+1}}$ appartient à $[0, 1/2[$, calculer $u_m\lambda - \dfrac{u_m^2}{1-2u_m}$ et en déduire que

$$\mathbb{P}(H_n - n \geq n\lambda) \leq exp\left(-n\frac{\lambda + 1 - \sqrt{2\lambda+1}}{2}\right)$$

g) En prenant $\lambda = 2\sqrt{\dfrac{t}{n}} + \dfrac{2t}{n}$, en déduire l'inégalité (E).

ALGEBRE

Planche 1 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On définit l'application Tr qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe la somme de ses éléments diagonaux :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i} \text{ où les } M_{i,j} \text{ sont les coefficients de } M$$

① Écrire une fonction `trace` qui prend en argument une matrice (donnée par exemple sous forme de liste de listes) et qui renvoie sa trace.

② Montrer que l'application Tr est une application linéaire.

③ Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

④ On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$.

a) Donner une base du noyau de Tr.

b) Soit I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de la forme xI_2, avec $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

c) Soit $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que, pour toute matrice B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $CB = BC$.
Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

On revient désormais au cas général.

⑤ Montrer que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on : $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Pour tous entiers $1 \leq i, j \leq n$, on définit la matrice $E^{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par ses coefficients $E^{i,j}_{i,j} = 1$ et $E^{i,j}_{k,l} = 0$ si $k \neq i$ ou $l \neq j$.

⑥ Expliquer pourquoi la famille $(E^{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⑦ Pour tous entiers $1 \leq i, j, k, l \leq n$ tels que $j \neq k$, montrer que $E^{i,j}E^{j,k} = E^{i,k}$ et $E^{i,j}E^{k,l} = 0$.

⑧ Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire vérifiant $f(AB) = f(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $f(E^{i,j}) = 0$ si $i \neq j$ et que $f(E^{i,i})$ ne dépend pas de i.

b) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(A) = x\mathrm{Tr}(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⑨ A-t-on $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$ pour toutes matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Planche 2 :

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z)$$

On considère aussi l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = g(e_1) + e_1$.

① a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) A l'aide de Python, déterminer les valeurs propres de f et conjecturer la dimension de chaque espace propre. L'endomorphisme f semble-t-il diagonalisable ?
✐ *On rappelle que, dans la bibliothèque* `numpy` *la fonction* `linalg.eig(A)` *renvoie les valeurs propres (réelles ou complexes) de A et la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres associés à ce valeurs propres (dans le même ordre).*

② a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice T de g dans la base $\mathcal{C}$.

c) En déduire les valeurs propres de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

③ On note $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MB\}$.

a) Écrire une fonction Python `E(M)` qui prend en argument une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et renvoie `True` si $M \in E$ et `False` sinon.
✐ *On rappelle que, si N est une matrice contenant des booléens, l'instruction* `N.all()` *renvoie* `True` *si N ne contient que des* `True` *et renvoie* `False` *sinon.*

b) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c) Montrer, par l'absurde, que si $M \in E$, alors M n'est pas inversible.

d) Montrer que $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(B^T)$ (où $\mathrm{Sp}(B)$ est l'ensemble des valeurs propres de B).

e) Montrer que, si $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et si $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de B^T associé à la valeur propre 2, alors $X \cdot Y^T \in E$.

f) En déduire que $\dim(E) \geq 2$.

Planche 3 :

On note pour tout $n \geq 1$ la matrice H_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice (i,j) est $\dfrac{1}{i+j-1}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Ainsi $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$.

① Justifier que pour tout n, H_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans une base orthonormée.

② Écrire une fonction d'argument $n \in \mathbb{N}^*$ qui retourne la matrice H_n et l'inverse du produit de ses valeurs propres. Testez pour $n = 2$ et $n = 3$.

③ Déterminer les valeurs propres de H_2.

④ Montrer que H_2 et H_3 sont inversibles.

⑤ On note ϕ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par :

$$\forall (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ \phi(a_1, \cdots, a_n) = a_1 + a_2 X + \cdots + a_n X^{n-1}$$

Montrer que ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

⑥ Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i X^{i-1}$ un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (P(t))^2\,dt = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}$

✐ On pourra utiliser, sans justifier, le développement :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j$$

⑦ On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_n et $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a donc :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i+k-1} e_k$$

Pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, on note $< x, y >$ leur produit scalaire.

a) Montrer que $< f(e_i), e_j >= \dfrac{1}{i+j-1}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

b) Montrer que $< f(x), x >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}$ pour tout $x = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

c) En déduire que $< f(x), x) \geq 0$ puis que toutes ls valeurs propres de H_n sont strictement positives.

Planche 4 :

Soit $u = (a, b, c)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qu'on suppose de norme 1 et soit $V = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix}$$

① Écrire une fonction Python, prenant en entrée un vecteur $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et un vecteur $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et renvoyant le vecteur $f(w)$ si u est de norme 1 et renvoyant `False` sinon.

② Calculer AV. En déduire le rang de f et une base de $\mathrm{Ker}(f)$

③ Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
On pourra distinguer plusieurs cas en fonction des valeurs de a, b et c

④ Vérifier que tout vecteur de $\mathrm{Ker}(f)$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{Im}(f)$.

⑤ On rappelle que pour tout couple (x, y) de vecteur de $\mathbb{R}^3$ représentés matriciellement par des matrices colonnes respectives X et Y de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire $< x, y >$ est égal à $X^T Y$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, < f(x), x >= 0$$

⑥ En déduire que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0\}$.

⑦ La matrice A est-elle diagonalisable ?

⑧ Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $C = A^2 + I_3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que $C = VV^T$.

b) Justifier que C est diagonalisable.

c) Déterminer les valeurs propres de C.

Planche 5 :

On considère les matrices carrées à coefficients réels de la forme :

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

Notons f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est $M(a)$.

① Écrire une fonction produit (A, B) qui prend en arguments deux matrices carrées A et B de même taille à coefficients entiers et qui retourne la matrice produit AB. On ne fera pas appel à la fonction dot du module numpy. On rappelle que si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant n}}$ sont des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le terme général ligne i, colonne j de AB est $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

② Déterminer le rang de la matrice $M(a)$ selon les valeurs de a.

③ Justifier que 0 et 1 sont des valeurs propres de f_a.

④ Déterminer une base du noyau de f_a selon les valeurs de a.

⑤ Montrer que e_1+e_3 est un vecteur propre de f_a. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_a selon les valeurs de $a.f_a$ est-elle diagonalisable ?

⑥ On considère une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

a) On s'intéresse à l'ensemble F des matrices qui commutent avec A :

$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) On considère l'application définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels :

$$g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$$
$$Q \mapsto (Q(\lambda_1), Q(\lambda_2), Q(\lambda_3))$$

Montrer que g est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

c) Après avoir justifié qu'il existe une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, montrer que $M \in F \Leftrightarrow CD = DC$ où $C = P^{-1}MP$.

d) Déterminer les matrices qui commutent avec D. En déduire que $M \in F$ si et seulement s'il existe c_1, c_2, c_3 des réels tels que $M = P \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} P^{-1}$.

e) À l'aide de la question 6 b, conclure que les matrices qui commutent avec A sont exactement les matrices M de la forme $Q(A)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.

f) Dans le cas particulier où $A = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, établir qu'une base de F est (I_3, A, A^2).

Planche 6 :

Pour tout $n \geqslant 1$. On considère la matrice $K_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$(K_n)_{i,i+1} = i, \text{ pour tout } j \in [\![1, n]\!], (K_n)_{j+1,j} = -n - 1 + j$$

et dont tous les autres coefficients sont nuls. On a donc :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

① Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de K_1. Cette matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

② Écrire une fonction K en Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la matrice K_n.

③ Utiliser la fonction précédente et la fonction `eigvals` du module `numpy.linalg` pour déterminer les valeurs propres de K_n pour $n \in [\![1, 10]\!]$. Que peut-on conjecturer ?

④ On se propose de montrer la conjecture faite dans la question précédente. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ et V_n le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $\mathscr{B}_n = (f_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^{n-k}(x) \sin^k(x)$$

On considère l'application φ_n définie pour tout $f \in V_n$ par $\varphi_n(f) = f'$

a) Soient $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Montrer que

$$\lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda_0 + \lambda_1 \tan(x) + \cdots + \lambda_n \tan(x)^n = 0.$$

b) En déduire que la famille $\mathscr{B}_n$ est une base de V_n et la dimension de V_n.

c) Monter que φ_n est un endomorphisme de V_n et déterminer sa matrice dans la base $\mathscr{B}_n$.

d) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on note g_k la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \exp(i(n - 2k)x)$$

Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}, g_k(x) = (\cos(x) + i\sin(x))^{n-k}(\cos(x) - i\sin(x))^k$.

e) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!], g_k$ appartient à V_n. Indication : On pourra utiliser sans le justifier que $\left(\sum_{j=0}^{n-k} a_j\right)\left(\sum_{l=0}^{k} b_l\right) = \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{k} a_j b_l$.

f) En déduire les valeurs propres de φ_n puis celle de K_n.

g) La matrice K_n est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

h) Déterminer pour quelle valeur de n, la matrice K_n est inversible.

i) Lorsque K_n n'est pas inversible, déterminer une base du noyau.

Planche 7 :

On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel que l'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

① a) Montrer que A est diagonalisable.

b) Que permet le programme suivant ?

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A = np.array([[5/2, 1, 1/2], [1, 2, 1], [1/2, 1, 5/2]])
I = np.eye(3)

r = al . matrix_rank (A - I)
s = al . matrix_rank (A -2* I)
t = al . matrix_rank (A -4* I)
```

c) A l'aide de Python, déterminer une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

d) Pourquoi cette base est-elle orthogonale ?

e) Proposer une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f. On notera $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ cette base.

② On considère l'application ϕ définie sur E^2 par :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \phi(u, v) = \langle u, f(v) \rangle.$$

a) Soit u (resp. v) un vecteur de E de coordonnées X (resp. Y) dans $\mathcal{B}$.

i. Exprimer $\phi(u, v)$ en fonction de A, X et Y.

ii. Exprimer $\phi(v, u)$ en fonction de A, X et Y.

iii. Montrer que $\phi(u, v) = \phi(v, u)$.

b) On note pour tout $u \in E$, F_u l'ensemble des vecteurs orthogonaux à u et :

$$F'_u = \{v \in E \text{ tel que } \phi(u, v) = 0\}.$$

i. Montrer que si u est un vecteur propre de f, alors $F_u = F'_u$.

ii. A-t-on toujours $F_u = F'_u$?

Planche 8 :

Soient a_1, a_2 et a_3 trois réels distincts.
Soit A la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on pose :

$$s_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} a_j,\ \ p_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} a_j \text{ et } d_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} (a_i - a_j).$$

① Écrire une fonction Python qui prend en argument une liste contenant les valeurs de a_1, a_2 et a_3 et renvoie la matrice A, sous forme de liste de listes.

② Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier i et une liste contenant les valeurs de a_1, a_2 et a_3, et renvoie une liste contenant les valeurs de s_i, p_i et d_i.

③ Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \ \varphi(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_3)).$$

a) Démontrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

b) On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique $\mathbb{R}_2[X]$, et $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer la matrice représentative de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

c) Déterminer le noyau de φ et en déduire que φ admet une réciproque, notée φ^{-1}.

④ Pour tout entier $i \in [\![1,3]\!]$, on pose : $L_i(X) = \frac{1}{d_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} (X - a_j)$.

a) Démontrer que : $\forall i \in [\![1,3]\!],\ \ L_i = \varphi^{-1}(e_i)$.

b) À l'aide des questions précédentes, démontrer que la matrice A est inversible, et déterminer A^{-1}.
(On exprimera les coefficients de A^{-1} en fonction des réels s_i, p_i et d_i.)

c) Écrire une fonction Python qui prend en argument une liste contenant les valeurs de a_1, a_2 et a_3 et renvoie la matrice A^{-1}, sous forme de liste de listes. Appliquer cette fonction avec $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et $a_3 = 4$.

Planche 9 :

① Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xf(x).$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer $g'(x)$ pour tout réel x.

c) La fonction g est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

② Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et la fonction f définie à la question 1 :

$$F = \operatorname{Vect}(f_0, f_1, f)$$

Prouver que la famille (f_0, f_1, f) est une base de F.

③ Pour toute fonction φ de F, on note $\Phi(\varphi)$ la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x\varphi(x)$.

a) Montrer que l'application $\Phi : \varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ est linéaire.

b) Vérifier que $\Phi(f_0) = f_0, \Phi(f_1) = 2f_1$ et calculer $\Phi(f)$.

c) En déduire que Φ est un endomorphisme de F et préciser sa matrice M dans la base (f_0, f_1, f) de F.

d) L'endomorphisme Φ est-il bijectif de F vers F ? Si oui, préciser la matrice Φ^{-1} dans la base (f_0, f_1, f)

e) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Planche 10 :

On pose $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $F = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On admet que F est un sous-espace vectoriel de E. Pour tout $y \in F$, on pose :

$$\varphi(y) = y'' + 2y'$$

① Démontrer que φ est un endomorphisme de F.

② On veut résoudre numériquement l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) & = -te^{-t} \\ y(0) & = 0 \\ y'(0) & = 1 \end{cases}, \forall t \in [0,5]$$

Pour cela on pose $z = y'$ et on résout successivement :

$$(*) \quad \begin{cases} z'(t) + 2z(t) & = -te^{-t} \\ z(0) & = 1 \end{cases} \text{ puis } (**) \quad \begin{cases} y'(t) & = z(t) \\ y(0) & = 0 \end{cases}, \forall t \in [0,5]$$

a) Écrire un programme Python qui permet de résoudre numériquement l'équation différentielle $(*)$ puis, à l'aide de la fonction z trouvée, de résoudre numériquement l'équtaion différentielle $(**)$. On écrire les solutions sous forme de listes.

b) Dans une fenêtre graphique, dessiner la courbe de la solution de $(*)$ et la courbe de la fonction $t \longmapsto -te^{-t}$ sur l'intervalle $[0,5]$. En déduire une conjecture portant sur une valeur propre de φ.

③ a) Notons $\mathcal{B} = (\exp, \cos, \sin)$. Démontrer que la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre de F.

b) Notons $G = \text{Vect}\{\mathcal{B}\}$. Démontrer que $\varphi(G) \subset G$.

c) D'après la question précédente, φ induit donc un endomorphisme de G que l'on note ψ. Déterminer la matrice représentatiove de ψ de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$.

d) Démontrer que cette matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

④ Démontrer que tout nombre réel λ appartient au spectre de φ. Préciser le sous-espace propre associé en fonction de la valeur de λ.

⑤ a) Détermine $\ker(\varphi)$.

b) Démontrer que $\text{Im}(\varphi) = F$.

c) Soit $g : t \longmapsto 2\cos(t)\sin(t) + 2\cos^2(t)$.
Déterminer l'ensemble des fonctions y telles que $\varphi(y) = g$.

Planche 11 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme usuelle notée $\| \cdot \|$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Pour toute famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit G la matrice de Gram de $(u_1, \dots, u_p)$ par

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_p \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_p, u_1 \rangle & \langle u_p, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_p, u_p \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

① a) Écrire une fonction Python ps prenant en argument deux vecteurs u et v sous formes de liste de même taille et renvoyant le produit scalaire $\langle u, v \rangle$.

b) Écrire une fonction Python Gram prenant en argument une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ sous forme d'une liste de listes et renvoyant la matrice de Gram de la famille $(u_1, \dots, u_p)$.

c) Tester votre fonction avec les vecteurs $u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.

② Justifier que la matrice de Gram dune famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.

③ Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de $\mathbb{R}^n$ et G sa matrice de Gram. On cherche à démontrer que la famille est libre si et seulement si G est inversible.

a) On suppose que G est inversible.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k = 0$. On pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Démontrer que $\mathrm{GX} = 0$, puis en déduire que $(u_1, \dots, \mathrm{u}_p)$ est libre.

b) On suppose que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $GX = 0$

i. Démontrer que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\left\langle u_i, \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \right\rangle = 0$.

ii. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k = 0$.

iii. Démontrer que $X = 0$, puis que G est inversible.

④ Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall \mathrm{i} \in [\![1, n]\!], \|v_\mathrm{i}\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall (\mathrm{i}, \mathrm{j}) \in [\![1, n]\!]^2, \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \Rightarrow \|v_\mathrm{i} - v_j\| = 1.$$

a) Pour tous a et $b \in \mathbb{R}^n$, démontrer que $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle$.

b) En déduire la matrice de Gram de la famille $(v_1, \dots, v_n)$, que l'on notera G.

c) On pose $A = 2G$. Exprimer A^2 en fonction de n, A et I_n (la matrice identité de taille n). En déduire que A est inversible.

d) Démontrer que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

ANALYSE

Planche 1 :

On considère la fonction f_n définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$$

① Montrer qu'il existe une unique racine de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.
On pose a_n le réel strictement positif tel que : $f_n(a_n) = 0$ et on considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

② Tracer grâce au logiciel de votre choix les courbes des premières fonctions (par exemple : f_1, f_2, f_3, f_4... jusqu'à f_{10})
Conjecturer la monotonie de (a_n) et sa limite.
Préciser cette conjecture grâce à l'algorithme de dichotomie dont le principe est rappelé ci-dessous :

③ a) Déterminer le signe de $f_{n+1}(a_n)$.
b) A l'aide des variations de f_{n+1}, comparer a_{n+1} et a_n (✐ On pourra s'aider d'un tableau de variation). Déterminer la monotonie de (a_n).
c) En déduire que la suite (a_n) converge vers un réel l.

④ Montrer que l est solution de l'équation :

$$\frac{1}{1-l} - 2 = 0$$

indication : Montrer que pour tout $n > 1$, $a_n \leq a_2 < 1$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{n+1}$.

Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$
— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

Planche 2 :

On se place sur $I = [0, 1]$ et on définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$f_0(x) = 1 \text{ et } f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}dt,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

① Déterminer pour tout $x \in I$, $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

② Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in I,\ f_n(x) = a_n x^{b_n}$.
On vérifiera que $a_{n+1} = \dfrac{4\sqrt{a_n}}{b_n + 2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + 1$.

③ Écrire une fonction Python `suites` d'argument n qui calcule et affiche les $n+1$ premiers termes de ces suites.
Faites une conjecture sur leurs limites respectives.

④ Déterminer b_n en fonction de n et en déduire sa limite.

⑤ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$.

⑥ On pose $w_n = 2^n \ln(a_n)$. Montrer que $\underset{n\to\infty}{lim}(w_{n+1} - w_n) = 1$.

⑦ En déduire $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, w_{n_0} \leq w_n \leq 2(n - n_0) + w_{n_0}$.
En déduire la limite de (a_n).

Planche 3 :

Soit $f : [a,b] \to [a,b],\ x \mapsto f(x)$ de classe C^1 et vérifiant

$$\exists k \in [0,1[,\ \forall x \in [a,b],\ |f'(x)| \leq k$$

① a) Montrer que $\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.
On dit que f est k contractante.

b) Montrer que f admet un unique point fixe sur $[a,b]$. On pourra étudier g définie par $g(x) = f(x) - x$.

② On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 \in [a,b] \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) Montrer que la suite est bien définie , à valeurs dans $[a,b]$ et vérifie
$\forall n \in \mathbb{N}\ , |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.

b) Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$converge absolument.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c point fixe de f.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ , |u_n - c| \leq k^n |u_0 - c|$.

③ a) Montrer que l'équation $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = 0$ admet sur $[-2,0]$ une unique solution, notée α.

b) Montrer que la fonction g définie sur $[-2,0]$ par $g(x) = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ admet un unique point fixe.

c) Montrer que g est $\frac{1}{2}$ contractante.

d) Écrire un script Python d'argument ε qui calcule une valeur approchée de α à ε près.

Planche 4 :

On définit la fonction numérique f sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x+t}\, dt.$$

① a) Proposer une fonction `Python` prenant en argument un réel x strictement positif et retournant une approximation de $f(x)$.

b) Proposer une approximation du graphe de la fonction f à l'aide de l'outil informatique. Conjecturer un résultat sur la monotonie de la fonction f et sur les limites au bord de son domaine de définition.

② Soient x et x' deux réels strictement positifs tels que $x < x'$. Déterminer le signe de $f(x) - f(x')$. En déduire que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

③ Justifier que f admet une limite finie en $+\infty$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de cette limite à ce stade de l'exercice.*

④ Dans cette question, on cherche à justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

a) Montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}; +\infty\right[, \ |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}.$$

b) En déduire que f est continue en x_0.

⑤ Montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout réel x strictement positif, on ait :

$$\frac{A}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{A}{x}.$$

Ce résultat est-il cohérent avec le graphe de f ? En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

⑥ Le but de cette question est de déterminer un équivalent simple de f en 0.

a) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*; \ g(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t) - 1}{x+t}\, dt.$$

En admettant l'inégalité suivante : $\forall t \in [0;1], |\cos(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2}$, établir que g est une fonction bornée.

b) En déduire un équivalent simple de f en 0.

Planche 5 :

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation suivante :

$$(E_n) : \quad \frac{\ln^2(x)}{x} = \frac{1}{n},$$

où n est un entier strictement positif, et x, l'inconnue, est un nombre réel strictement positif. Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$\forall x \in [1;+\infty[, f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}.$$

① a) Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

b) En déduire que l'équation (E_1) n'admet pas de solution.

c) Démontrer que, pour $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet deux solutions, que l'on notera α_n et β_n, telles que :

$$1 \leq \alpha_n \leq e^2 \leq \beta_n.$$

② À l'aide de l'outil informatique, représenter sur un même graphe la courbe représentative de f ainsi que les droites D_i, $1 \leq i \leq 6$, où D_i a pour équation $y = \frac{1}{i}$, pour $i \in [\![1, 6]\!]$.

③ Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variations et sur les limites des suites $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ et $(\beta_n)_{n\geq 2}$?

④ On va étudier la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ dans cette question.

a) Démontrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ est strictement monotone.

b) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.

c) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = \frac{\beta_n}{n}$. On admet que $\ln(u_n) = \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))$.
Prouver alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)$.

d) En déduire un équivalent de $(\beta_n)_{n\geq 2}$.

⑤ On s'intéresse dans cette question à la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$

a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.

b) Donner un équivalent de $\alpha_n - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comment pourrait-on vérifier ce résultat avec l'outil informatique ?

Planche 6 :

Rappel : algorithme de dichotomie.

On considère une fonction g continue sur un intervalle $[a;b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a;b]$ en un point que l'on note α.

On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

— Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ et :

$$\text{si } g(a_k)g(c_k) \leq 0, \text{ alors } a_{k+1} = a_k \text{ et } b_{k+1} = c_k$$

$$\text{sinon } a_{k+1} = c_k \text{ et } b_{k+1} = b_k$$

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ convergent toutes les deux vers α.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

① Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α.

② En utilisant des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à l'aide de Python, justifier que

$$\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

③ En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel n, deux réels a et b et la fonction f, et qui renvoie α à 10^{-n} près.

④ Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si} x > \alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que Φ est une densité de probabilité.

⑤ Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)dt$ converge absolument.

⑥ Montrer que $\forall t > \alpha, f'(t) = t\Phi(t) - \dfrac{1}{t^2}$.

⑦ Soit X une variable aléatoire admettant Φ pour densité. Calculer l'espérance de X de deux manières différentes et en donner un encadrement par deux entiers consécutifs.

Planche 7 :

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. On définit ensuite la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour $\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

① a) Étudier les variations de f.

b) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

② a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution . On l'appelle a.

b) Monter que $\frac{1}{e} < a < 1$.

c) Ecrire une fonction donnant une valeur approchée de a à 10^{-3} près.
(La méthode de dichotomie était rappelée .)

③ a) Montrer que $a < u_0 < u_2$ et $u_3 < u_1 < a$.

b) Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones .
Peuvent-elles converger vers une même limite ?
Qu'en déduit-on concernant la convergence de (u_n) ?

④ On pose, pour $x \geq 0$, $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$.

a) Expliciter $h(x)$ pour $x > 0$. Montrer que h est continue en 0.

b) Résoudre $h(x) = x$.

c) Montrer que la suite (u_{2n+1}) est convergente et préciser sa limite.

d) Montrer que la suite (u_{2n}) diverge vers $+\infty$.

Planche 8 :

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n par : $\forall x \geq n \quad f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

① a) Montrer que f_n est dérivable sur son domaine de définition et donner f_n'.

b) A l'aide d'une minoration de f_n, montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

c) En déduire que pour tout entier naturel n, l'équation $f_n(x) = 1$ a une unique solution. On note dans la suite u_n cette solution.

② a) Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.

c) A l'aide de la question précédente, écrire un programme Python affichant une valeur de n telle que $u_n - n < 10^{-4}$.

③ Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - n$.

a) Montrer que (v_n) converge vers 0.

b) Montrer que pour tout réel x tel que $x \geq -1$ on a $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a $e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} e^{-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}}$.

d) A l'aide de la question 2)b), montrer que $u_n - n$ équivaut à $e^{-\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Planche 9 :

Rappel. Algorithme de dichotomie
On considère une fonction g continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$

— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $g(a_k)g(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α.

Soit $n \geqslant 2$. On pose $f_n(x) = x^n + x - n$.

① Justifier que pour tout $n \geqslant 2, 2^n \geqslant n$ et en déduire qu'il existe un unique $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(\varepsilon_n) = 0$ et que $1 \leqslant \varepsilon_n \leqslant 2$

② On souhaite étudier la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$.

a) Montrer que $1 \leqslant \varepsilon_n \leqslant n^{1/n}$.

b) En déduire que la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et sa limite ℓ.

③ On fixe pour le reste de l'exercice $n > 1$. On souhaite calculer une valeur approchée de ε_n. À l'aide de l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction `dichotomie` en Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie un réel x tel que $0 \leqslant x - \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{2n}$.

④ On pose $g_n(x) = x - \frac{f_n(x)}{f_n'(x)}$. On définit une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : x_0 est un réel obtenu par dichotomie tel que $0 \leqslant x_0 - \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{2n}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}, x_{k+1} = g_n(x_k)$.

a) Justifier que g_n est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, exprimer la dérivée de g_n en fonction de f_n, f_n' et f_n'' et étudier ses variations sur cet intervalle.

b) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}, x_k$ est bien défini et $\varepsilon_n \leqslant x_k$.

c) En déduire que $(x_k)_{k\geqslant 0}$ est décroissante puis qu'elle converge vers ε_n.

d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $c \in [\varepsilon_n, x_k]$ tel que :

$$0 \leqslant x_{k+1} - \varepsilon_n \leqslant (n-1)\frac{f_n(c)}{nc^{n-1} + 1}(x_k - \varepsilon_n)$$

e) Déduire de la question précédente que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant x_{k+1} - \varepsilon_n \leqslant (n-1)(x_k - \varepsilon_n)^2$$

f) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant x_k - \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{n2^{2^k}}$.

⑤ À l'aide de la suite définie dans cette partie, écrire une fonction `Approx` en Python qui prend en entrée un entier n et un réel strictement positif e et qui renvoie une approximation de ε_n à e près.

Planche 10 :

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1], f(x) = \frac{1}{3}\left(-e^{-x} + \ln\left(1+x^2\right)\right)$.

① a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, et déterminer f' et f''. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $A = (a, f(a))$ où $a \in [0,1]$.

b) Montrer que : $\forall x \in [0,1], f'(x) \geqslant \frac{e-1}{3}$ et $|f''(x)| \leqslant 1$.

c) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ de $]0,1[$ tel que $f(\ell) = 0$.

② Soit $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \neq b$. On pose φ la fonction définie sur $[0,1]$ par :
$\forall x \in [0,1], \varphi(x) = f(a) - f(x) - (a-x)f'(x) - \frac{1}{2}(a-x)^2\gamma$, où γ est un réel tel que $\varphi(b) = 0$.

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et donner φ'.

b) Justifier l'existence d'un réel c compris strictement entre a et b tel que $\varphi'(c) = 0$.

c) En déduire qu'il existe un réel c compris strictement entre a et b tel que :

$$f(b) = f(a) - (a-b)f'(b) - \frac{1}{2}(a-b)^2 f''(c).$$

③ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de réels définie par $u_0 \in]\,0,1\,[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. On admet que si $u_0 \neq \ell$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq \ell$, où ℓ est le réel défini en question 1 (c).

a) Écrire une fonction suite en Python, prenant en entrée a et un entier n et renvoyant la liste des valeurs de $(u_0, u_1, \cdots, u_n)$ quand $u_0 = a$. Compiler ce programme pour les valeurs suivantes de a : $0.3, 0.5$ et 0.8 et pour $n = 12$. Que pouvez-vous conjecturer ?

b) On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un réel z_n compris entre ℓ et u_n tel que :

$$u_{n+1} - \ell = \frac{(u_n - \ell)^2}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(u_n)}.$$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3e}{2}\right)^{2^n - 1} |u_0 - \ell|^{2^n}$.

d) Dans cette dernière question, on suppose que $|u_0 - \ell| \leqslant \frac{2}{10}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
Donner une valeur de n à partir de laquelle u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près, puis à 10^{-5} près.

Planche 11 :

Pour tout x réel, on pose :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

① Démontrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

② Calculer $f(0)$.

③ a) Ecrire une fonction `g(x, t)` qui pour un x et un t donnés, fournit la valeur de $\dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$

b) Expliquer pourquoi la fonction suivante fournit une valeur approchée de $f(x)$. Quel est le nom de cette méthode ?

```python
def methode(x, n):
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S+1/n*g(x,k/n)
    return S
```

c) Utiliser cette fonction pour obtenir une valeur approchée de π.

④ Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\exp(-2x)\frac{\pi}{4} \leq f(x) \leq \exp(-x)\frac{\pi}{4}$$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

⑤ On admet que f est dérivable et que pour tout réel x on a :

$$f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$$

a) Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$x \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt = \int_0^1 e^{-u^2} du$$

b) Pour tout x réel on pose :

$$h(x) = f(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$$

Démontrer que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, qu'elle est constante et déterminer sa valeur.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.