SUJETS D'ALGEBRE

Exercice 43 :

1. a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions continues et, par « croissances comparées » :

$$\lim_{x\to 0} x\ln|x| = 0 = f(0)$$

b) L La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions de classe C^1 et, pour tout $x \neq 0$:

$$g'(x) = 2x\ln|x| + x$$

— La fonction g est dérivable et de dérivée nulle en 0 parce que :

$$\lim_{x\to 0-} \frac{g(x)-(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$$

Par conséquent, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2f(x) + x$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}, g'$ aussi et g est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0} = \frac{2f(x)+x}{x} = 1 + 2\ln|x|$$

qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 .

La fonction g' n'étant pas dérivable en $0, g$ n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \mu f = 0_F$
Comme $\lambda_0 f_0(0) + \lambda_1 f_1(0) + \mu f(0) = \lambda_0$, on a nécessairement : $\lambda_0 = 0$.
Comme $\lambda_1 f_1 + \mu f = 0_F$ et comme f_1 et 0_F sont dérivables en 0 alors que f ne l'est pas, on a nécessairement : $\mu = 0$.
Comme $\lambda_1 f_1 = 0_F$ et comme la fonction f_1 n'est pas identiquement nulle, on a aussi, nécessairement : $\lambda_1 = 0$ [✐ *Note :* On pouvait aussi, évidemment, évaluer les fonctions en $x = 1$...]
Par conséquent, la famille (f_0, f_1, f) est libre. C'est donc une base de l'espace vectoriel F, dont elle est par définition une famille génératrice.

3. a) Soit $\varphi \in F$, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \mu f$. Ainsi, pour tout réel x, $x\varphi(x) = \lambda_0 x f_0(x) + \lambda_1 x f_1(x) + \mu x f(x) = x f_0(x) + \lambda_1 x f_1(x) + \mu g(x)$.
Puisque g est dérivable sur $\mathbb{R}, x \mapsto x\varphi(x)$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soient $(\varphi_1, \varphi_2) \in F^2, \lambda \in \mathbb{R}$, pour tout réel x, on a :

$$\Phi(\lambda\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \left(x(\lambda\varphi_1(x) + \varphi_2(x))\right)' = \lambda(x\varphi_1(x))' + (x\varphi_2(x))' = \lambda\Phi(\varphi_1)(x) + \Phi(\varphi_2)(x)$$

Ainsi $\Phi(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda\Phi(\varphi_1) + \Phi(\varphi_2)$ et Φ est bien linéaire.

b) Pour tout réel x :

$$\Phi(f_0)(x) = 1 = f_0(x) \text{ donc } \Phi(f_0) = f_0, \quad \Phi(f_1)(x) = 2x = 2f_1(x) \text{ donc } \Phi(f_1) = 2f_1$$
$$\Phi(f)(x) = g'(x) = x + 2f(x) = f_1(x) + 2f(x) \text{ donc } \Phi(f) = f_1 + 2f$$

c) On a démontré que Φ est linéaire et, puisque $\Phi(f_0), \Phi(f_1)$ et $\Phi(f)$ appartiennent à F, par linéarité, pour tout élement φ de $F, \Phi(\varphi)$ appartient également à F donc Φ est bien un endomorphisme de F et sa matrice dans la base (f_0, f_1, f) est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d) La matrice M est de rang 3 (matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont non nuls) donc M est inversible et Φ est bijective. Par le calcul, on obtient :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

e) M étant triangulaire supérieure, on peut lire ses valeurs propres sur sa diagonale donc $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2\}$. Par le calcul, on détermine les sous-espaces propres de M, on obtient :

$$E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), E_2(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 2 donc, d'après la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation, M n'est pas diagonalisable. Par conséquent, Φ non plus.