SUJETS D'ALGEBRE

Exercice 42 :

① On propose le code :

```python
def A(l):
    [a1,a2,a3] = l
    return [[1,a1,a1**2],[1,a2,a2**2],[1,a3,a3**2]]

def spd(i,l):
    [a1,a2,a3]=l
    if i==1:
        return (a2+a3,a2*a3, (a1-a2)*(a1-a3))
    elif i==2:
        return (a1+a3,a1*a3,(a2-a1)*(a2-a3))
    else:
        return (a1+a2,a1*a2,(a3-a1)*(a3-a2))
```

② a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(P + \lambda Q)(x) = P(x) + \lambda Q(x)$, et donc on a bien la linéarité de φ.

b) On a alors

$$\varphi(1) = (1,1,1),\ \varphi(X) = (a_1, a_2, a_3) \text{ et } \varphi(X^2) = (a_1^2, a_2^2, a_3^2),$$

et donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = A$.

c) Si $P \in \ker(\varphi)$, alors P est de degré au plus 2, et possède au moins 3 racines. Donc $P = 0$. Finalement, $\ker(\varphi) = \{0\}$, et donc φ est injective. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathbb{R}^3)$, on a bien la bijectivité de φ.

③ a) Soit donc $i \in [\![1, 3]\!]$.
On note alors que $L_i(a_i) = 1$, alors que $_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$.
Ainsi, on a $\varphi(L_i) = e_i$, et donc l'égalité voulue.

b) A représente un isomorphisme, et donc est inversible, avec $A^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\varphi^{-1})$.
On note alors que pour tout i,

$$L_i = \frac{1}{d_i}X^2 - \frac{s_i}{d_i}X + \frac{p_i}{d_i}.$$

On a alors

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{d_1} & \frac{p_2}{d_2} & \frac{p_3}{d_3} \\ -\frac{s_1}{d_1} & -\frac{s_2}{d_2} & -\frac{s_3}{d_3} \\ \frac{1}{d_1} & \frac{1}{d_2} & \frac{1}{d_3} \end{pmatrix}.$$

c) Il suffit d'appliquer le résultat précédent

```python
def invA(l):
    [a1,a2,a3]=l
    s1,p1,d1 = spd(1,l)
    s2,p2,d2 = spd(2,l)
    s3,p3,d3 = spd(3,l)
    return [[p1/d1,p2/d2,p3/d3],[-s1/d1,-s2/d2,-s3/d3],[1/d1,1/d2,1/d3]]
```