SUJETS D'ALGEBRE

Exercice 41 :

On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel que l'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

① a) *Montrer que A est diagonalisable :*
A est diagonalisable car elle est symétrique à coefficients réels. Elle est aussi diagonalisable car on va voir qu'elle a trois valeurs propres distinctes deux à deux distinctes et on constate qu'elle est de taille 3.

b) *Que permet le programme proposé ?*
Le programme donné permet de calculer le rang de $A - \lambda I_3$ pour $\lambda \in \{1, 2, 4\}$.

c) *A l'aide de Python, déterminer une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.*

— Dans le programme de la question précédente, on a obtenu le rang de $A - \lambda I_3$ pour $\lambda \in \{1, 2, 4\}$. Cela donne à chaque fois 2, A étant de taille 3, cela prouve que 1 ; 2 et 4 sont des valeurs propres de A et même les valeurs propres de A (car A a au maximum 3 valeurs propres). Chacun des sous-espaces propres de A est, d'après le théorème du rang, de dimension $3 - 2$, c'est à dire 1.

— On complète le programme de la question précédente, par la ligne `la.eig(A)` afin d'accéder à des vecteurs propres. On nous propose $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ comme famille de vecteurs propres.

— $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre de A car $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est non nul et :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Au passage, $\begin{pmatrix} d1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. De même, on prouve que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4 et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

— La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est, en tant que concaténation de familles libres de sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, une famille libre. Or c'est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ayant 3, soit la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, éléments. Ces arguments suffisent pour affirmer que c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. C'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

d) *Pourquoi cette base est-elle orthogonale ?* Rappelons que A est symétrique à coefficients réels. On sait alors que ses espaces propres sont orthogonaux entre eux. Comme ils sont tous ici de dimension 1, on peut affirme que la base obtenue dans la question précédente est automatiquement orthogonale.

e) *Proposer une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f.* On notera $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ cette base.
On déduit, des questions précédentes et du fait que A est la matrice canoniquement associée à f, une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f, c'est :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right).$$

② On considère l'application ϕ définie sur E^2 par :

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad \phi(u,v) = \langle u, f(v)\rangle.$$

a) Soit u (resp. v) un vecteur de E de coordonnées X (resp. Y) dans $\mathcal{B}$.

i. *Exprimer $\phi(u,v)$ en fonction de A, X et Y.* A est la matrice canoniquement associée à f donc la matrice canoniquement associée à $f(v)$ est AY, celle canoniquement associée à u est X. D'après le cours, on sait que :

$$\begin{aligned}\langle u, f(v)\rangle &= \langle f(v), u\rangle \\ &= (AY)^T X \\ &= Y^T A^T X \\ &= Y^T AX \text{ car } A \text{ est symétrique.}\end{aligned}$$

On a donc obtenu : $\phi(u,v) = Y^T AX$.

ii. Exprimer $\phi(v,u)$ en fonction de A, X et Y. De même, on a :

$$\begin{aligned}\phi(v,u) &= \langle v, f(u)\rangle \\ &= Y^T AX\end{aligned}$$

iii. *Montrer que $\phi(u,v) = \phi(v,u)$.*
De $\phi(u,v) = Y^T AX$ et $\phi(v,u) = Y^T AX$, on déduit immédiatement que :

$$\phi(u,v) = \phi(v,u).$$

b) On note pour tout $u \in E$, F_u l'ensemble des vecteurs orthogonaux à u et :

$$F'_u = \{v \in E \text{ tel que } \phi(u,v) = 0\}.$$

i. *Montrer que si u est un vecteur propre de f, alors $F_u = F'_u$.*
Supposons que u soit un vecteur propre de f. On sait alors que $u \neq 0$ et qu'il existe λ un réel tel que :

$$f(u) = \lambda u.$$

— $\subset$
Soit x un élément de F_u. On a alors :

$$\begin{aligned} \phi(u,x) &= \phi(x,u) \text{ d'après la question 2)a)} \\ &= \langle x, f(u)\rangle \\ &= \langle x, \lambda u\rangle \\ &= \lambda\langle x, u\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque x appartient à l'ensemble des vecteurs orthogonaux à u.
On a donc $x \in F'_u$ et donc $F_u \subset F'_u$.

— $\supset$
Soit x un élément de F'_u. On vient de voir que :

$$\phi(u,x) = \lambda\langle x, u\rangle.$$

x appartenant à F'_u, cela entraîne que $\phi(u,x) = 0$ et donc :

$$\lambda\langle x, u\rangle = 0.$$

Comme $\lambda \neq 0$ (puisque les valeurs propres de f sont 2, 4 et 1), on en déduit que $\langle x, u\rangle = 0$ et donc x appartient à F_u.
On a donc $x \in F_u$ et donc $F'_u \subset F_u$.

Bilan : on a bien, par double inclusion, prouvé que $F_u = F'_u$.

ii. A-t-on toujours $F_u = F'_u$?
Prenons le contre-exemple suivant : $u = (1,0,0)$. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in F_u &\iff \langle (x,y,z), u\rangle = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in F'_u &\iff \phi(u,(x,y,z)) = 0 \\ &\iff \phi((x,y,z),u) = 0 \\ &\iff \langle (x,y,z), f(u)\rangle = 0 \\ &\iff \langle (x,y,z), \left(\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)\rangle = 0 \\ &\qquad \text{d'après les coefficients de } A\text{, matrice canoniquement associée à } f \\ &\iff 5x + 2y + z = 0 \end{aligned}$$

Avec ces équations, on constate que $(0,1,0)$ est un élément de F_u et pas de F'_u. On constate aussi que $(1,0,-5)$ est un élément de F'_u et pas de F_u. On peut donc conclure que F_u n'est pas toujours F'_u.