SUJETS D'ALGEBRE

Exercice 40 :

① Les valeurs propres de K_1 sont $-i$ et i et on obtient $E_{-i} = \text{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\}$ et $E_i = \text{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\}$. On conclut que K_1 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

② Une rédaction possible est la suivante, en prenant bien soin de noter qu'en Python les indices les indices vont varier entre 0 et n :

```python
def K(n: int) -> np.ndarray:
    A = np.zeros((n+1, n+1))
    for i in range(n):
        A[i, i+1] = i+1
        A[i+1, i] = -n+i
    return A
```

③ On rappelle que `np.linalg.eig(A)` retourne un tuple dont le premier terme contient le spectre. On pourra alors écrire :

```python
def valPropres():
    return [np.linalg.eig(K(n))[0] for n in range(1, 11)]
```

et conclure que les valeurs propres de K_n sont $\boxed{\{-ni, -(n-2)i, \cdots, (n-2)i, ni\}}$

④ a) Soient $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On a :

$$\lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos(x)^n \left(\lambda_0 \frac{\sin^0(x)}{\cos^0(x)} + \cdots + \lambda_n \frac{\sin^n(x)}{\cos^n(x)} \right) = 0$$

on conclut à l'aide du fait que $\cos(x) \neq 0$.

b) Par définition, $\mathscr{B}_n$ est génératrice de V_n. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que

$$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0.$$

D'après la question précédente, le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ possède une infinité de racines. Donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ et la famille $\mathscr{B}_n$ est libre. Et donc V_n est de dimension $n+1$.

c) La dérivée est linéaire donc φ_n est linéaire. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
On a : $\varphi_n(f_k) = -(n-k) f_{k+1} + k f_{k-1} \in V_n$, de plus $\varphi_n(f_0) = -n f_1 \in V_n$ et $\varphi_n(f_n) = n f_{n-1} \in V_n$.
Donc φ_n est un endomorphisme de V_n est sa matrice dans la base $\mathscr{B}_n$ est K_n.

d) On a : $g_k(x) = \mathrm{e}^{(n-k)ix} \mathrm{e}^{-kix} = (\cos(x) + i\sin(x))^{n-k} (\cos(x) - i\sin(x))^k$.

e) En utilisant le binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \left(\sum_{j=0}^{n-k} \begin{pmatrix} n-k \\ j \end{pmatrix} i^j \cos^{n-k-j}(x) \sin^j(x) \right) \left(\sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} i^l \cos^{k-l}(x) \sin^l(x) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} n-k \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} i^{j+l} f_{j+l}(x) \in V_n \end{aligned}$$

f) On a $\varphi_n(g_k) = (n-2k)ig_k$ [il suffit de dériver...].
Donc pour tout $k \in [\![0, n]\!], (n-2k)i$ est valeur propre de φ_n. Or φ_n est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$, ce sont donc toutes les valeurs propres de φ_n.
On déduit le même résultat pour K_n.

g) La matrice K_n est de taille $(n+1) \times (n+1)$ et possède $n+1$ valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$

h) K_n est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre. Donc K_n est inversible si, et seulement si, n est impair.

i) Tous les sous-espaces propres sont de dimension 1, donc si $n = 2p$, pour trouver une base du noyau, il suffit d'après f) de trouver le vecteur coordonnée de g_p dans la base $\mathscr{B}_n$.
Or
$$1 = g_p(x) = (\cos(x) + i\sin(x))^p (\cos(x) - i\sin(x))^p$$
Soit
$$1 = g_p(x) = \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^p = \sum_{l=0}^{p} \binom{p}{l} \cos^{2p-2l}(x) \sin^{2l}(x)$$
Ce qui donne comme vecteur du noyau $\left(\binom{2p}{2\times 0}, 0, \binom{2p}{2\times 1}, \dots, 0, \binom{2p}{2p}\right)$.