SUJETS D'ALGEBRE

Exercice 39 :

① Une rédaction est possible pour toute matrice dont les tailles sont compatibles avec le produit. On écrira par exemple :

```
def produit(A, B: np.ndarray) -> np.ndarray:
    ra, ca = np.shape(A)
    rb, cb = np.shape(B)
    assert ca == rb, "tailles incompatibles pour le produit"
    C = np.zeros((ra, cb))
    for i in range(ra):
        for j in range(cb):
            for k in range(ca):
                C[i,j] += A[i,k]*B[k,j]
    return C
```

② $\text{rg}(M(a)) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ 2 & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$.

③ $\text{rg}(M(a)) < 3$ dont 0 est valeur propre de f_a et on note que $f_a(e_2) = e_2$ (cf. la deuxième colonne de $M(a)$...)
Conclusion : $\boxed{0 \text{ et } 1 \text{ sont deux valeurs propres de } f_a.}$

④ D'après la formule du rang : $\dim(Ker(f_a)) = \begin{cases} 3-1=2 & \text{si } a = 0 \\ 3-2=1 & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$.

— si $a = 0$, $f_a(e_1) = 0 = f_a(e_3)$. donc $\boxed{\text{Ker}(f_a) = \text{Vect}\{e_1, e_3\}}$

— si $a \neq 0$, $f_a(e_1) - f_a(e_3) = f_a(e_1 - e_3) = 0$ donc $\boxed{\text{Ker}(f_a) = \text{Vect}\{e_1 - e_3\}}$

⑤ $f_a(e_1 + e_3) = 2a(e_1 + e_3)$ avec $e_1 + e_3 \neq 0$, donc $e_1 + e_3$ est un vecteur propre de f_a pour la valeur propre $2a$.

— Si $a \neq 0$ et $a \neq \dfrac{1}{2}$: les valeurs propres sont 0,1 et $2a$. Les espaces propres respectifs sont $E_0 = Vect(e_1 - e_3)$, $E_1 = Vect(e_2)$ et $E_{2a} = \text{Vect}(e_1 + e_3)$
— Si $a = 0$: les valeurs propres sont 0,1 . Les espaces propres respectifs sont $E_0 = Vect(e_1, e_3)$ et $E_1 = Vect(e_2)$.
— Si $a = \dfrac{1}{2}$: les valeurs propres sont 0,1 . Les espaces propres respectifs sont $E_0 = Vect(e_1 - e_3)$ et $E_1 = Vect(e_2, e_1 + e_3)$.

✐ *Remarque :* Peu importe la valeur de a, f_a est diagonalisable car la matrice $M(a)$ est symétrique à coefficients réels.

⑥ a) On vérifie que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en revenant à la définition.

b) g est une application linéaire injective (un polynôme de degré au plus 2 ayant trois racines distinctes est nul) entre espaces de même dimension : g est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

c) A est diagonalisable car possède trois valeurs propres distinctes. En multipliant par P^{-1} à gauche et P à droite : $M \in F \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow DP^{-1}MP =$

$P^{-1}MPD \Leftrightarrow DC = CD$ où $C = P^{-1}MP$. Les valeurs propres étant deux à deux distinctes, les matrices qui commutent avec D sont diagonales.

Ainsi, $M \in F$ si et seulement s'il existe c_1, c_2, c_3 des réels tels que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$.

D'où le résultat demandé en multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite.

d) Si M commute avec A, M est de la forme $P \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} P^{-1}$.

g étant surjective, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $c_1 = Q(\lambda_1), c_2 = Q(\lambda_2)$ et $c_3 = Q(\lambda_3)$.

Ainsi : $M = P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & Q(\lambda_3) \end{pmatrix} P^{-1}$.

Si on note :

$$Q = \sum_{k=0}^{2} a_k X^k : M = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{2} a_k \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{2} a_k \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{2} a_k \lambda_3^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{2} a_k P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^k P^{-1}$$

$$M = \sum_{k=0}^{2} a_k \left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^k = \sum_{k=0}^{2} a_k A^k = Q(A).$$

Réciproquement, une telle, matrice commute avec A.

e) (I_3, A, A^2) est une famille génératrice de F d'après la question précédente. On montre que cette famille est de plus libre.