Exercice 118 Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^+$, $p \in]0,1[$

$S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

① Posons $M_n = \frac{S_n}{n}$; $\mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}(np) = p$

$V(M_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{npq}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Conclusion : $\boxed{\forall x > 0,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) \leq \frac{p(1-p)}{nx^2}}$

② Une résolution possible est la suivante :

```
def valApprochee(n, p, x, m=10000):
    N = 0
    for _ in range(m):
        S = sum([rdm.random() <= p for k in range(n)])
        if abs(S/n - p) >= x :
            N += 1
    return N/m
```

③ A l'aide de la fonction précédente, on obtient :

- $P\left(\left|\frac{S_{100}}{100} - \frac{1}{2}\right| \geq 0.1\right) \simeq 0.032 << \frac{p(1-p)}{nx^2} = \frac{1}{4}$
- $P\left(\left|\frac{S_{200}}{200} - \frac{1}{2}\right| \geq 0.1\right) \simeq 0.0048 \leq \frac{p(1-p)}{nx^2} = \frac{1}{8}$.

Confirme le fait que les majorations obtenues à l'aide de l'inégalité de B.T. sont extrêmement grossières...

④ Posons $X = e^{\lambda(S_n - np)}$: $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

et X est une var discrète finie donc $\mathbb{E}(X)$ existe..

L'inégalité de Markov assure que :

$\forall \lambda > 0,\ P(X \geq e^{\lambda n x}) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{e^{\lambda n x}}$

or $e^{\lambda(S_n-np)} \geq e^{\lambda n x} \Leftrightarrow \lambda(S_n-np) \geq \lambda n x$ car exp ↗

$\Leftrightarrow S_n-np \geq nx$ car $\lambda>0$

Conclusion $\boxed{\forall \lambda>0,\ \mathbb{P}(S_n-np \geq nx) \leq \dfrac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda(S_n-np)}\right)}{e^{\lambda n x}}}$

⑤ $\forall \lambda>0$,

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda(S_n-np)}\right] = e^{-\lambda np}\,\mathbb{E}\left(e^{\lambda S_n}\right)$$ théorème de Transfert.

$$= e^{-\lambda np}\sum_{k=0}^{n} e^{\lambda k}\,\mathbb{P}(S_n=k)$$ $e^{\lambda k}=(e^{\lambda})^k$

$$= e^{-\lambda np}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^{\lambda})^k q^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda np}(pe^{\lambda}+q)^n$$ binôme de Newton

$$= \left[e^{-\lambda p}(pe^{\lambda}+q)\right]^n$$

$$= \left[pe^{\lambda(1-p)} + qe^{-\lambda p}\right]^n$$

Conclusion $\boxed{\forall \lambda>0,\ \mathbb{E}\left(e^{\lambda(S_n-np)}\right) = (pe^{\lambda q}+qe^{-\lambda p})^n}$

⑥ on admet que : $\forall t\in\mathbb{R},\ e^t \leq e^{t^2}+t$

Montrons que $(pe^{\lambda q}+qe^{-\lambda p})^n \leq e^{n\lambda^2}$

$\Leftrightarrow pe^{\lambda q}+qe^{-\lambda p} \leq e^{\lambda^2}$

or $\begin{cases} e^{\lambda q} \leq e^{\lambda^2 q^2}+\lambda q \Rightarrow pe^{\lambda q} \leq pe^{\lambda^2 q^2}+\lambda pq \\ e^{-\lambda p} \leq e^{\lambda^2 p^2}-\lambda p \Rightarrow qe^{-\lambda p} \leq qe^{\lambda^2 p^2}-\lambda pq \end{cases}$

car $p>0$ et $q>0$

Donc

$$pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p} \leq pe^{\lambda^2 q^2} + qe^{\lambda^2 p^2}$$

Or $0 < p < 1 \Rightarrow 0 < p^2 < 1 \Rightarrow \lambda^2 p^2 < \lambda^2$
$0 < q < 1 \Rightarrow 0 < q^2 < 1 \Rightarrow \lambda^2 q^2 < \lambda^2$

et donc

$$pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p} \leq pe^{\lambda^2} + qe^{\lambda^2} \quad \text{car exp} \nearrow$$
$$\leq (p+q)e^{\lambda^2}$$
$$\leq e^{\lambda^2} \quad \text{car } p+q = 1$$

D'après ④ et ⑤ on a donc :

<u>Conclusion</u> $\boxed{\forall \lambda > 0, \ \mathbb{P}(S_n - np \geq n\alpha) \leq e^{n\lambda^2 - \lambda n\alpha}}$

Par ailleurs, $n\lambda^2 - \lambda n\alpha \geqslant -n\alpha^2/4$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{4}\alpha^2 - \lambda n\alpha + n\lambda^2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{n}\lambda - \frac{\sqrt{n}\,\alpha}{2}\right)^2 \geqslant 0$$, ce qui est vrai pour tout $\lambda > 0$.

Dès lors, puisque $\mathbb{P}(S_n - np \geqslant n\alpha) \leq e^{n\lambda^2 - \lambda n\alpha}$ est vrai pour tout $\lambda > 0$, c'est en particulier vrai pour $\lambda = \frac{\alpha}{2} > 0$

<u>Conclusion</u> $\boxed{\mathbb{P}(S_n - np \geq n\alpha) \leq e^{-n\alpha^2/4}}$

⑦ Il ne s'agit pas de la faire complètement mais de donner des pistes ...

$$\mathbb{P}(S_n - np \leq -n\alpha) = \mathbb{P}(-S_n + np \geqslant n\alpha)$$

On pose cette fois $X = e^{\lambda(-S_n + np)} = e^{-\lambda(S_n - np)}$

Alors, $\forall \lambda > 0, \ \mathbb{P}(X \geqslant e^{\lambda n\alpha}) \leq \mathbb{E}(X)/e^{\lambda n\alpha}$

Soit $P(-S_n + np \geq nx) \leq \dfrac{E\left[e^{-\lambda(S_n - np)}\right]}{e^{\lambda n x}}$

avec $E\left[e^{-\lambda(S_n - np)}\right] = e^{\lambda n p} E\left[e^{-\lambda S_n}\right]$ (linéarité de E)

$= e^{\lambda n p} \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ (th. de Transfert)

$= e^{\lambda n p} (pe^{-\lambda} + q)^n = \left[e^{\lambda p}(pe^{-\lambda} + q)\right]^n$

$= \left(q e^{\lambda p} + p e^{-\lambda q}\right)^n \leq e^{n\lambda^2}$

(Par symétrie des notations...

Conclusion $\boxed{P(S_n - np \leq -nx) \leq e^{-nx^2/4}}$ par des arguments identiques à ceux de (6)...

(7) $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) = P(|S_n - np| \geq nx)$ Ev^t incompatibles

$= P(S_n - np \leq -nx) + P(S_n - np \geq nx)$

$\leq e^{-nx^2/4} + e^{-nx^2/4}$

Conclusion $\boxed{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) \leq 2e^{-nx^2/4}}$

On note que $\lim_{x \to 0^+} 2e^{-nx^2/4} = 2$; $\lim_{x \to \infty} 2e^{-nx^2/4} = 0$

et $2e^{-nx^2/4} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-nx^2/4} \leq 1/2$

$\Leftrightarrow -nx^2/4 \leq \ln(1/2)$

$\Leftrightarrow -nx^2 \leq 4\ln(1/2)$

$\Leftrightarrow x^2 \geq \frac{4}{n}\ln(2)$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\ln(2)}$ (Pour $n = 100$, $x \geq 0.166$)

Valeur de x à partir de laquelle cette inégalité présente un minimum d'intérêt...

Conclusion : Dans les conditions de la question (3), l'inégalité obtenue grâce à B.T. est meilleure. Une représentation graphique prouve même qu'elle est meilleure pour tout $x > 0$...