$\boxed{\text{Exercice 117}}$ n figurines avec n mathématiciens $(n \geq 2)$

$X_{k,n}$ = Nb de figurines du k-ième mathématicien obtenues lors de l'achat de n boîtes

$Y_n = \max\{X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}\}$

① La probabilité qu'une boîte contienne un mathématicien donné vaut $1/n$

Il s'agit donc d'un schéma binomial : Dénombrement des succès au cours de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Conclusion $\boxed{X_{k,n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/n)}$ $(k \in [\![1,n]\!])$

. $\forall x > n$, $P(X_{k,n} = x) = 0$

. $\forall x \in [\![0,n]\!]$, $P(X_{k,n} = x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{n}\right)^x\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-x}$

or $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^x}{x!}$

Donc

$$\binom{n}{x}\left(\frac{1}{n}\right)^x \underset{\infty}{\sim} \frac{n^x}{x!}\,\frac{1}{n^x} = \frac{1}{x!}$$

et $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-x} = e^{(n-x)\ln(1-\frac{1}{n})}$ avec $\begin{cases} n-x \underset{\infty}{\sim} n \\ \ln(1-\frac{1}{n}) \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{n} \end{cases}$

Donc $(n-x)\ln(1-\frac{1}{n}) \underset{\infty}{\sim} -1$

et donc $\lim\limits_{n\to\infty} e^{(n-x)\ln(1-1/n)} = e^{-1}$ (continuité de exp sur $\mathbb{R}$ et donc en -1 ...)

Soit $e^{(n-x)\ln(1-\frac{1}{n})} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{e}$

conclusion $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} P(X_{k,n} = x) = \frac{1}{x!\,e}, \forall x \in \mathbb{N}}$

② a)

```python
def simuleY(n):
    Eff_figurine = [0]*n  # initialisation des effectifs
    for k in range(n):
        f = rdm.randint(1,n)  # n° de la kième figurine
        Eff_figurine[f-1] += 1
    max = 0
    for i in range(n):
        if Eff_figurine[i] > max:
            max = Eff_figurine[i]
    return max
```

Remarque : Modéliser n lois binomiales et renvoyer le maximum n'est pas correct car $(Y_n = 0)$ est impossible [on a au moins 1 figurine]

b) On s'appuie sur la loi faible des grands nombres et on répète un grand nombre de fois la fonction précédente dont les retours sont supposés indépendants, avant d'en calculer la moyenne empirique.

```
def estimEspY(n, m=1000):
    S = 0
    for _ in range(m):
        S += simulY(n)
    return S/m
```

Pour $n = 1000$, la fonction renvoie $E(Y_n) \simeq 5,52$

(3) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, montrons que $1+x \leq e^x$

Plusieurs méthodes sont possibles :

(i) TAF appliqué à exp sur $[0, x]$: $\exists c \in]0, x[\,/\, e^x - 1 = xe^c$

- Si $x > 0$, $0 < c < x \Rightarrow 1 < e^c \Rightarrow e^x - 1 = xe^c > x$
- Si $x < 0$, $x < c < 0 \Rightarrow e^c < 1 \Rightarrow e^x - 1 = xe^c > x$ [car $x < 0$]
- Si $x = 0$, $e^x - 1 = 0 = x$

(ii) Etude de $f : x \mapsto e^x - 1 - x$

(iii) la fonction exp est convexe [dérivée seconde strict^t positive] donc $\mathcal{C}_{exp}$ est au dessus de chacune de ses tangentes
or $\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$

donc la tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$. $\square$

Conclusion $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq e^x}$

b) Pour tous t, x réels :

d'après (3) a) et $e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$e^x + (tY_n - x)e^x = e^x[1 + (tY_n - x)] \leq e^x \cdot e^{tY_n - x}$$
$$\leq e^{(tY_n - x) + x} = e^{tY_n}$$

Conclusion $\boxed{\forall t, x \in \mathbb{R},\ e^x + (tY_n - x)e^x \leq e^{tY_n}}$

c) On a pas tellement le choix... Prenons $x = E(tY_n)$ (qui existe car Y_n VAR discrète finie...)

Alors
$$tY_n - \alpha = tY_n - \mathbb{E}(tY_n) = t\left[Y_n - \mathbb{E}(Y_n)\right]$$
l'inégalité précédente assure que :
$$e^{\mathbb{E}(tY_n)} + (tY_n - \mathbb{E}(tY_n))\, e^{\mathbb{E}(tY_n)} \leq e^{tY_n}$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{\mathbb{E}(tY_n)}\left[1 + t(Y_n - \mathbb{E}(Y_n))\right] \leq e^{tY_n}$$

On rappelle que, si X_1, X_2 sont 2 VAR qui admettent une espérance, alors :
$$X_1 \geq X_2 \Leftrightarrow X_1 - X_2 \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) \geq 0$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_1) \geq \mathbb{E}(X_2)$$

Dès lors :
$$\mathbb{E}\left[e^{\mathbb{E}(tY_n)}(1 + t(Y_n - \mathbb{E}(Y_n)))\right] \leq \mathbb{E}(e^{tY_n})$$
linéarité de $\mathbb{E}$
$$\Leftrightarrow \quad e^{\mathbb{E}(tY_n)}(1 + t\,\underbrace{\mathbb{E}(Y_n - \mathbb{E}(Y_n))}_{=0 \text{ car } Y_n - \mathbb{E}(Y_n) \text{ VAR centrée.}}) \leq \mathbb{E}(e^{tY_n})$$

Conclusion : $\boxed{e^{\mathbb{E}(tY_n)} \leq \mathbb{E}(e^{tY_n})}$

④ Démonstration par récurrence de R_k : " $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$ " pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

(i) $k=1$: $P(A_1) \leq P(A_1)$ ∴ R_1 est vraie.

(ii) On suppose R_k vraie pour k fixé ($k \in \mathbb{N}^*$)

(iii) Alors
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}\right)$$
$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1}) - \underbrace{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right)}_{\geq 0}$$
$$\leq P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1})$$
$$\leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + P(A_{k+1}) \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i)$$

(iv) Conclusion $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i)}$

⑤ On note $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/n)$

a) $\forall k \in [\![1, n]\!]$ Si $(Y_n = k)$ est réalisé alors l'une au moins des figurines a été obtenue exactement k fois

Noter que ces évènements ne sont pas incompatibles et que la réciproque est évidemment fausse.

Conclusion $\boxed{(Y_n = k) \subset (X_{1,n} = k) \cup \dots \cup (X_{n,n} = k)}$

b) $\mathbb{E}(e^{tY_n}) = \sum_{k=1}^{n} e^{tk} . \mathbb{P}(Y_n = k)$ car $Y_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$

avec $\mathbb{P}(Y_n = k) \leq \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} (X_{i,n} = k)\right]$ d'après ⑤ a).

$\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_{i,n} = k)$ d'après ④

Donc

$$\mathbb{E}(e^{tY_n}) \leq \sum_{k=1}^{n} e^{tk} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_{i,n} = k)$$ car $e^{tk} > 0$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} e^{tk} \mathbb{P}(X_{i,n} = k)$$ Th. de Transfert et $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbb{E}(e^{tX_n}) - \underbrace{\mathbb{P}(X_{i,n} = 0)}_{= 1 - \frac{1}{n}}\right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_n}) = n . \mathbb{E}(e^{tX_n})$$

Conclusion $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{tY_n}) \leq n\, \mathbb{E}(e^{tX_n})}$

c) $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{tX_n}) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$: théor. de Transfert.

$\mathbb{E}(e^{tX_n}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{e^t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = \left(\frac{e^t}{n} + 1 - \frac{1}{n}\right)^n$: bin. de Newton

Soit $\boxed{\mathbb{E}(e^{tX_n}) = \left(1 + \frac{e^t - 1}{n}\right)^n}$

D'après ③c) et ⑤b) : $e^{\mathbb{E}(tY_n)} \leq \mathbb{E}(e^{tY_n}) \leq n\, \mathbb{E}(e^{tX_n})$

Soit : $\underbrace{\mathbb{E}(tY_n)}_{= t\mathbb{E}(Y_n)} \leq \ln(n) + \ln\left[\left(1 + \frac{e^t - 1}{n}\right)^n\right]$ composition par "ln" en notant que $\mathbb{E}(e^{tX_n}) > 0$.

Conclusion $\boxed{\mathbb{E}(Y_n) \leq \frac{\ln(n) + n \ln\left(1 + \frac{e^t - 1}{n}\right)}{t} \quad \forall t > 0}$

d) On a déjà vu que $1+x \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Donc
$$0 < 1+x \leq e^x \quad \forall x > -1.$$

Dès lors, en composant par "ln" :

$$\boxed{\ln(1+x) \leq x \quad \forall x > -1}$$

On obtient alors que $\ln\left(1+\frac{e^t-1}{n}\right) \leq \frac{e^t-1}{n}$
si $\frac{e^t-1}{n} > -1$

Prenons $t = \ln(1+\ln(n))$, alors $e^t - 1 = \ln(n) > 0$
(puisque $n \geq 2$ par hypothèse)
et donc $\frac{e^t-1}{n} = \frac{\ln(n)}{n} > 0 > -1$

D'où :
$$\mathbb{E}(Y_n) \leq \frac{\ln(n) + n \cdot \frac{\ln(n)}{n}}{\ln(1+\ln(n))}$$ d'après ⑤ c) pour $t = \ln(1+\ln(n))$.

Conclusion $$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) \leq \frac{2\ln(n)}{\ln(1+\ln(n))}}$$

On pourra vérifier cette inégalité grâce à Python.