Exercice 116

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, X_k var égale au nombre d'articles achetés par le $k^{ième}$ client.

$X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, VAR mutuellement indépendantes

$N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ indépendante des X_k, égale au nbre de clients en 1 heure.

① $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$

②

```
def x(l, m):
    x = 0
    N = np.random.poisson(l)
    for i in range(1, N+1):
        x += np.random.poisson(m)
    return x
```

③ $n \in \mathbb{N}$, $(N=0)$ est réalisé ssi aucun client n'est passé au cours de la première heure.
Dès lors

$$\boxed{\mathbb{P}_{(N=0)}(X=n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}}$$

④ (i) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ par hypothèse.
Montrons également que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(2\mu)$ si $X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, X_1 et X_2 indépendantes.

- $(X_1+X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_1+X_2=n) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1+X_2=n, X_1=i)$ (SCE)

$$= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_1=i).\underbrace{\mathbb{P}(X_2=n-i)}_{=\emptyset \text{ si } n-i<0 \Leftrightarrow i>n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} e^{-\mu}\frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu}\frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!}$$

Soit,

$$\mathbb{P}(X_1+X_2=n) = \frac{e^{-2\mu}}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mu^i\mu^{n-i} \underset{\text{b. de Newton}}{=} \frac{e^{-2\mu}}{n!}(2\mu)^n$$

Donc $X_1+X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(2\mu)$

(ii) Supposons que $X_1+\dots+X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(k\mu)$ pour k fixé $(k \geq 1)$

(iii) $X_1+\dots+X_k$ et X_{k+1} sont indépendantes d'après le lemme de coalition car $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ sont supposées mutuellement indépendantes

$X_1+\dots+X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(k\mu)$ et $X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$

D'où, d'après (i) : $(X_1+\dots+X_k)+X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(k\mu+\mu)$
ou encore
$$X_1+\dots+X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{P}((k+1)\mu).$$

(iv) Conclusion $\boxed{\forall k\geq 1,\ \sum_{i=1}^{k} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(k\mu)}$

⑤ On utilise la FPT avec le SCE : $\{(N=k),\ k\in\mathbb{N}\}$
Alors, $\forall n\in\mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}(X=n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[(X=n)\cap(N=k)] = \sum_{k=0} \underbrace{\mathbb{P}_{(N=k)}(X=n)}_{=0 \text{ si } k=0}.\mathbb{P}(N=k)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1+\dots+X_k=n).\,\mathbb{P}(N=k)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu k}\frac{(\mu k)^n}{n!}\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
car $X_1+\dots+X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(k\mu)$

conclusion $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k!\,n!}\,e^{-(\lambda+\mu k)}}$

⑥ On nous demande d'admettre l'existence de $E(X)$ et on nous autorise les interversions de sommes..
Soit,
$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k!\,\cancel{n!}}\,e^{-(\lambda+\mu k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-(\lambda+\mu k)}.\,k\mu \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k\mu)^{n-1}}{(n-1)!}}_{=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(k\mu)^i}{i!} = e^{k\mu}}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\cancel{k}!}\,e^{-\lambda}(\cancel{k}\mu)$$
$$= e^{-\lambda}\lambda\mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\mu \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda}\lambda\mu\,e^{\lambda}$$

conclusion $\boxed{E(X) = \lambda\mu}$

⑦ $$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=0,\ N=k)$$
$$= \underbrace{\mathbb{P}_{(N=0)}(X=0)}_{=1}\mathbb{P}(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_{(N=k)}(X=0).\,\mathbb{P}(N=k)$$
$$= e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1+\dots+X_k=0).\,\mathbb{P}(N=k)$$

Soit $\mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-Nk} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-N})^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\left(e^{\lambda e^{-N}} - 1\right) = e^{-\lambda + \lambda e^{-N}}$$

Conclusion $\boxed{\mathbb{P}(X=0) = e^{\lambda(e^{-N}-1)}}$

Par ailleurs $f_n(\lambda e^{-N}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n \lambda^k e^{-kN}}{k!}$

Donc, d'après (5) : $\boxed{\mathbb{P}(X=n) = \frac{N^n e^{-\lambda}}{n!} f_n(\lambda e^{-N}), \forall n \in \mathbb{N}^*}$

(8) $\boxed{f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1}$

$$\boxed{f_1(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^k}{k!} = x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = x \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \boxed{xe^x}$$

(9) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},$

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{n+1} \frac{x^k}{k!} = x + \sum_{k=2}^{\infty} k^{n+1} \frac{x^k}{k!} \quad \Big\} \, l = k-1$$

$$= x + \sum_{l=1}^{\infty} (l+1)^n \cdot \frac{x^{l+1}}{l!} = x + x \sum_{l=1}^{\infty} \underbrace{(l+1)^n}_{= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} l^i} \frac{x^l}{l!}$$

$$= x + x \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} l^i \frac{x^l}{l!}}_{= f_i(x)}$$

Conclusion $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = x + \sum_{i=0}^{n} x \binom{n}{i} f_i(x)}$

(10) $f_2(x) = x + \sum_{i=0}^{1} x \binom{1}{i} f_i(x) = x + x f_0(x) + x f_1(x)$

$$= x\left[\cancel{1} + e^x \cancel{-1} + xe^x\right]$$

Conclusion $\boxed{f_2(x) = x(1+x)e^x}$

(11) On raisonne en appliquant le principe de récursivité.

```
def f(n:int, x:float) -> float:
    if n==0:
        return exp(x)-1
    elif n==1:
        return x*exp(x)
    else:
        S = x
        for i in range(n):
            S += x*binom(n-1, i)*f(i,x)
        return S
```

(12) On applique le résultat obtenu en (7) :

```
def probX(n:int, l,m:float) -> float:
    if n==0:
        return exp(l*(exp(-m)-1))
    else:
        return m**n*exp(-l)*f(n, l*exp(-m))/
                                    factorial(n)
```

Remarque : on peut tester cette fonction en rappelant que :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(X=n) = \lambda \mu .$$

Prenons $\lambda = 3$ et $\mu = 2$, alors :

```
>> sum([n*probX(n,3,2) for n in range(25)])
```

renvoie : 5,98 $\simeq 3*2 = 6$.

(pas trop grand... attention au $\binom{\cdot}{\cdot}$...)