$\boxed{\text{Exercice 115}}$ X est symétrique si X et $-X$ ont même loi.

$V \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$; $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{(0,1)}$; U et V indépendantes.

① a) Soit $T = 2V - 1$.

- $T(\Omega) = \{-1, 1\}$ puisque $V(\Omega) = \{0, 1\}$
- $P(T=1) = P(2V-1=1) = P(2V=2) = P(V=1) = 1/2$

donc $P(T=-1) = 1 - P(T=1) = 1 - p = 1/2$

Dès lors
- $(-T)(\Omega) = \{-1, 1\} = T(\Omega)$
- $P(-T=1) = P(T=-1) = 1/2 = P(T=1)$
- $P(-T=-1) = P(T=1) = 1/2 = P(T=-1)$

T et $-T$ ont la même loi

Conclusion $\boxed{T \text{ est une VAR symétrique}}$

b)

```
def simulT(n):
    L = []
    for k in range(n):
        V = int(rdm.random() < 1/2)
        L.append(2*V - 1)
    return L
```

② a) $W = 2 - \ln(1-U)$

- $U(\Omega) =]0,1[$ donc $(1-U)(\Omega) =]0,1[$
$\Rightarrow (\ln(1-U))(\Omega) = \mathbb{R}_-^*$
$\Rightarrow -\ln(1-U)(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$
$\Rightarrow W(\Omega) =]2, +\infty[$.

$\forall x \leq 2, \quad F_W(x) = 0$

$\forall x > 2, \quad F_W(x) = P(W \leq x) = P(2 - \ln(1-U) \leq x)$
$= P[-\ln(1-U) \geq 2 - x)$
$= P(1 - U \geq e^{2-x})$
$= P(U \leq 1 - e^{2-x}) = F_U(\underbrace{1 - e^{2-x}}_{\in]0,1[\text{ si } x > 2 \ldots})$
$= 1 - e^{2-x}$

F_W est continue sur $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$ (composition de fonctions continues)

et $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} F_W(x) = 1 - e^0 = 0 = F_W(2)$

avec $\forall x > 2, \; F_W'(x) = e^{2-x} \Rightarrow \lim_{x \to 2^+} F_W(x) = 1$

Donc F_W est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, ce qui assure que W est une VAR à densité.

Soit f_W une densité de W.

$\forall x \leq 2, \ f_W(x) = F'_W(x) = 0$
$\forall x > 2, \ f_W(x) = F'_W(x) = e^{2-x}$

<u>Conclusion</u> $\boxed{W \text{ est une VAR à densité, de densité } f_W : x \mapsto e^{2-x} \mathbb{1}_{]2,+\infty[}(x)}$

b) Une fonction possible est la suivante :

```
def simulW(n):
    L=[]
    for k in range(n):
        L.append(2-log(1-rdm.random()))
    return L
```

③ a)

```
def traceRealisationsZ(n):
    LT = simulT(n)
    LW = simulW(n)
    LZ = [LT[k]*LW[k] for k in range(n)]
    m, M = min(LZ), max(LZ)
    C = [m+k*(M-m)/20 for k in range(21)]
    plt.hist(LZ, C)
    plt.show().
```

b) $Z = T.W$ avec $T(\Omega) = \{-1,1\}$; $W(\Omega) =]2;+\infty[$
Donc
$$Z(\Omega) =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[= -Z(\Omega)$$

$\forall x < -2, \ F_Z(x) = \mathbb{P}(TW \leq x)$ FPT, SCE $= \{(T=-1)(T=1)\}$.
$= \mathbb{P}(TW \leq x, T=-1) + \mathbb{P}(TW \leq x, T=1)$
$= \mathbb{P}(W \geq -x, T=-1) + \mathbb{P}(W \leq x, T=1)$
$= \mathbb{P}(W \geq -x).\mathbb{P}(T=-1) + \mathbb{P}(W \leq x).\mathbb{P}(T=1)$
[D'après le lemme de coalition, car U et V sont indépendantes et $T = 2V-1$, $W = 2-\ln(1-U)$...]

Soit $F_Z(x) = (1 - F_W(-x))\frac{1}{2} + F_W(x)\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}[1 - F_W(-x) + \underbrace{F_W(x)}_{= 0 \text{ si } x<-2}]$$

$$= \frac{1}{2}(1 - F_W(-x)) = \frac{1}{2}(1-(1-e^{2+x}))$$

$$= \frac{1}{2}e^{2+x}$$

. $F_Z(-2) = \frac{1}{2}$ donc $\underline{F_Z(x) = \frac{1}{2} \ \forall x \in [-2;2)}$ puisque Z ne prend pas de valeurs dans $[-2;2)$

. $\forall x \geq 2$, $F_Z(x) = \mathbb{P}(TW \leq x)$

$$= \mathbb{P}(TW \leq x, T=-1) + \mathbb{P}(TW \leq x, T=1)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(W \geq -x)}_{= 1 \text{ car } W(\Omega) =]2,+\infty[\text{ et } -x<0.} \cdot \mathbb{P}(T=-1) + \mathbb{P}(W \leq x)\cdot\mathbb{P}(T=1)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-e^{2-x}) = 1 - \frac{1}{2}e^{2-x}$$

Remarque on vérifie la continuité de F_Z en 2 et $\lim\limits_{x\to-\infty} F_Z(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} F_Z(x) = 1$.

On vient d'obtenir : $\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2+x} & \text{si } x<-2 \\ 1/2 & \text{si } x \in [-2,2) \\ 1 - \frac{1}{2}e^{2-x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}}$

Déterminons maintenant la fonction de répartition de $-Z$ ...

$\forall x < -2$, $F_{-Z}(x) = \mathbb{P}(-WT \leq x) = \mathbb{P}(WT \geq -x)$

$$= \mathbb{P}(WT \geq -x, T=-1) + \mathbb{P}(WT \geq -x, T=1)$$

$$= \mathbb{P}(W \leq x)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(W \geq -x)\frac{1}{2}$$

$$= F_Z(x)$$

$\forall x \in [-2,2)$, $F_{-Z}(x) = F_Z(-2) = 1/2$.

$\forall x \geq 2$, $F_{-Z}(x) = \mathbb{P}(-WT \leq x) = \mathbb{P}(WT \geq -x)$

$$= \mathbb{P}(W \leq x)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(W \geq -x)1/2$$

$$= F_Z(x)$$

Conclusion $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{-Z}(x) = F_Z(x) : Z \text{ et } -Z \text{ ont même loi... } Z \text{ est une VAR symétrique.}}$

④ X est une VAR symétrique.

a) $P(X\leq 0)+P(X>0)=1$ car $\{(X\leq 0),(X>0)\}$ est un SCE...

or $P(X<0)=P(-X<0)$ car X et $-X$ ont même loi.
$=P(X>0)$

Donc
$$P(X>0)=P(X\leq 0)-P(X=0)$$

D'où $P(X\leq 0)+P(X>0)=1 \Leftrightarrow 2P(X\leq 0)=1+P(X=0)$

conclusion $\boxed{P(X\leq 0)=\frac{1}{2}(1+P(X=0))}$

b) f est impaire ; Montrons que $Y=f(X)$ est symétrique.

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_Y(x)=P(f(X)\leq x)$

et $F_{-Y}(x)=P(-f(X)\leq x)=P(f(-X)\leq x)$ [imparité de f]

$=P(f(X)\leq x)$ car X et $-X$ ont même loi.

$=F_Y(x)$

conclusion $\boxed{Y=f(X)\text{ est symétrique.}}$

c) Soit Y VAR discrète symétrique, indépendante de X.

Montrons que $X+Y$ est symétrique.

FPT avec $\{(Y=i),\ i\in Y(\Omega)\}$ SCE.

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{X+Y}(x)=P(X+Y\leq x)=\sum_{i\in Y(\Omega)}P(X+Y\leq x,\ Y=i)$

$=\sum_{i\in Y(\Omega)}P(X\leq x-i)\,P(Y=i)$ car X et Y sont indépendantes

et

$F_{-(X+Y)}(x)=P(-X-Y\leq x)=\sum_{j\in(-Y)(\Omega)}P(-X-Y\leq x,\ -Y=j)$

$=\sum_{j\in Y(\Omega)}\underbrace{P(-X\leq x-j)}_{=P(X\leq x-j)}\underbrace{P(-Y=j)}_{=P(Y=j)}$ car X et $-X$ ont même loi. car X et Y sont symétriques.

$=F_{X+Y}(x)$

conclusion $\boxed{X+Y\text{ est symétrique.}}$