$\boxed{\text{Exercice 114}}$

(1) Il s'agit d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0,1[$.
X est égale au rang du 1er succès.

Conclusion $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \; ; \; E(X) = \frac{1}{p} \; ; \; V(X) = \frac{q}{p^2}}$

(2) On modélise successivement le nombre d'essais du chien A puis le nombre de succès du chien B au cours de X répétitions d'épreuves de Bernoulli de même paramètre p.
Soit :

```
def Essais(p: float) -> tuple:
    X = 1
    while rdm.random() > p:
        X += 1
    Y = 0
    for k in range(X):
        if rdm.random() <= p:
            Y += 1
    return (X, Y)
```

(3) On reconnait un schéma binomial. ($n \in \mathbb{N}^*$)

D'où :

$$\boxed{P_{(X=n)}(Y=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \end{cases}}$$

(4) Admis : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[, \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^{n-k}$ converge et

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On utilise le S.C.E. $\{(X=n), n \in \mathbb{N}^*\}$ et la formule des Probabilités Totales.

$$P(Y=k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y=k, N=n)$$

Soit :

$$P(Y=k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y=k, X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{(X=n)}(Y=k).P(X=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} p q^{n-1}$$

$$= p^{k+1} \sum_{n=k}^{\infty} q^{2n-k-1} = p^{k+1} \sum_{n=k}^{\infty} q^{2n-2k} . q^{k-1}$$

$$= p^{k+1} q^{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} (q^2)^{(n-k)} = \frac{p^{k+1} q^{k-1}}{(1-q^2)^{k+1}} \quad \text{(Admis)}$$

$$= \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}} \quad \text{puisque } 1-q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)$$

Par ailleurs $P(Y=0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{(X=n)}(Y=0)\, P(X=n)$ [toujours la FPT...)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} q^n p q^{n-1} = \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n}$$

$$= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-q^2} - 1\right) = \frac{p}{q} \frac{1-1+q^2}{p(1+q)}$$

$$= \frac{p \cdot q^2}{pq(1+q)} = \frac{q}{1+q}$$

<u>Conclusion</u>

$$\boxed{P(Y=0) = \frac{q}{1+q} \; ; \; P(Y=k) = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*}$$

il est toujours bon de vérifier (si on a le temps...)

$$P(Y=0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(Y=k) = \frac{q}{1+q} + \frac{1}{(1+q)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{q}{1+q} + \frac{1}{(1+q)^2} \frac{1}{1-\frac{q}{1+q}} = \frac{q}{1+q} + \frac{1}{(1+q)^2}(1+q)$$

$$= \frac{q}{1+q} + \frac{1}{1+q} = \frac{1+q}{1+q} = 1 \quad \square$$

5) on exploite la fonction 'Essais()' et on estime $E(Y)$ en appliquant la <u>loi faible des grands nombres</u>, c'est-à-dire en <u>calculant la moyenne empirique</u> d'un m-échantillon (m grand) de la variable aléatoire Y.

```python
def estimEspY(p, m=10000):
    S = 0
    for k in range(m):
        S += Essais(p)[1]
    return S/m
```

Remarque Des appels successifs de cette fonction laissent penser que $E(Y) = 1$ quel que soit la valeur de $p \in]0,1[$...

(c) $E(Y)$? $\sum_{k\geq 1} kP(Y=k) = \sum_{k\geq 1} k \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$

cette série est de même nature que :

$\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}$ qui converge car $0 < \frac{q}{1+q} < 1$.

Donc $E(Y)$ existe et,

$$E(Y) = 0.P(Y=0) + \sum_{k=1}^{\infty} kP(Y=k)$$

$$= \frac{1}{(1+q)^2}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1+q)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{q}{1+q}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+q)^2}(1+q)^2 = 1.$$

Conclusion $\boxed{E(Y) \text{ existe et } E(Y) = 1 \quad \forall p \in]0,1[.}$

Remarque on admet pour la suite que $V(Y)$ existe et $V(Y) = 2q$.

(5) a) c'est une question classique...

Si $k > n \geq 1$, $P(X=n, Y=k) = 0$
alors que :
$$P(X=n) = p.q^{n-1} \text{ et } P(Y=k) = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$$

Donc $P(X=n, Y=k) = 0 \neq P(X=n).P(Y=k)$ si $k > n \geq 1$.

Conclusion $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$

le cours assure que X et Y indépendantes $\Rightarrow cov(X,Y) = 0$
Il est impossible d'affirmer que $cov(X,Y) \neq 0$.

b) $\mathbb{E}(X.Y)$? On étudie $\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} kn\,\underbrace{\mathbb{P}(X=n,Y=k)}_{\mathbb{P}_{(X=n)}(Y=k)\cdot\mathbb{P}(X=n)}$

$\underbrace{\mathbb{P}_{(X=n)}(Y=k)}_{\neq 0 \text{ si } 0\leq k\leq n.}$

Soit

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{n} kn\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\,p\,q^{n-1}$$

$$=\sum_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{n} kn\binom{n}{k}p^{k+1}q^{2n-k-1}$$

$$=\sum_{n\geq 1} n^2\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k+1}q^{2n-k-1} \quad i=k-1$$

$$=\sum_{n\geq 1} n^2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^{i+2}\underbrace{q^{2n-(i+1)-1}}_{=q^{2n-i-2}=q^{2(n-1-i)}\cdot q^i}$$

$$=\sum_{n\geq 1} n^2 p^2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(pq)^i(q^2)^{n-1-i}$$

$$=\sum_{n\geq 1} n^2p^2(\underbrace{pq+q^2}_{=q(p+q)=q})^{n-1}=\sum_{n\geq 1} n^2p^2\cdot q^{n-1}$$

Cette série est de même nature que $\sum_{n\geq 1} n^2 q^{n-1}$ qui converge car $|q|<1$ (cf cours S.N.)

Donc $\mathbb{E}(XY)$ existe et

$$\mathbb{E}(XY)=p^2\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^{n-1}=p^2\left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)q^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}\right]$$

$$=p^2\left[q\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{1}{(1-q)^2}\right]=\frac{2q}{1-q}+1 \quad \text{car } 1-q=p$$

$$=\frac{2q+1-q}{1-q}=\boxed{\frac{1+q}{1-q}}$$

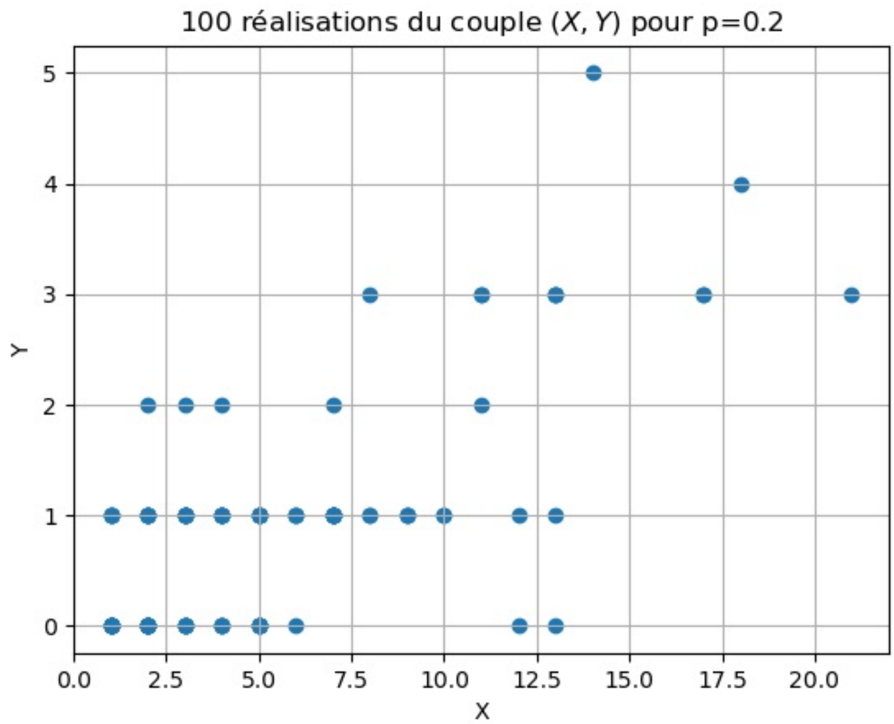
c) On en déduit que

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y)=\frac{1+q}{1-q}-\frac{1}{p}.$$

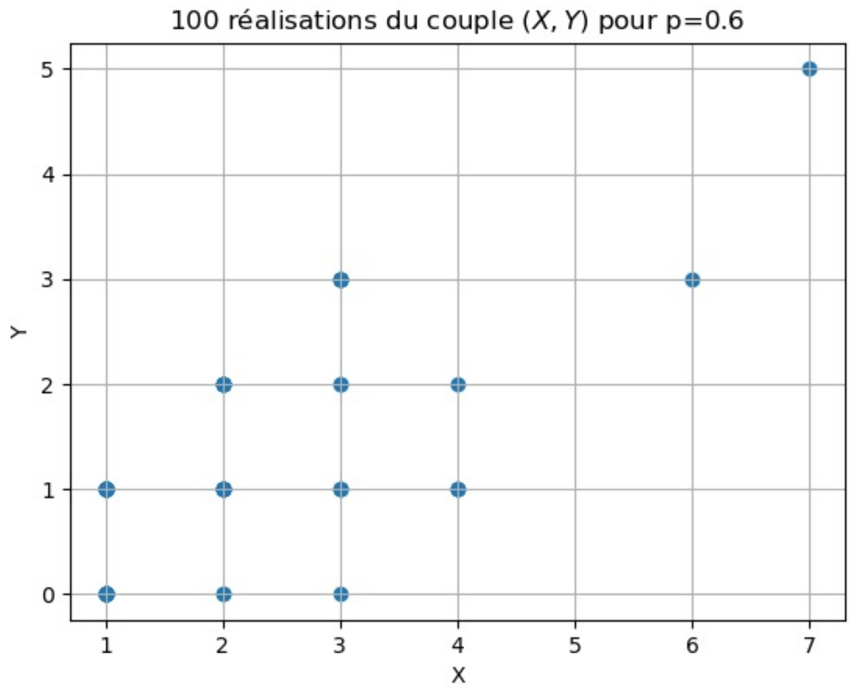
Conclusion $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1+q-1}{p}=\frac{q}{p}}$

Et donc $\boxed{\rho}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{q}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{q/p^2}\cdot\sqrt{2q}}=\frac{q}{p}\cdot\frac{p}{q\sqrt{2}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$

d) Confirmation graphique:



le calcul du coefficient de corrélation renvoie
$\rho = 0{,}70$



le calcul du coefficient de corrélation renvoie :

$\rho = 0{,}69$