Exercice 37

$u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \|u\| = 1$; $V = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$

(1)

```
def calculf(u,w : np.ndarray):
    a, b, c = u
    A = np.matrix([[0, -b, a], [b, 0, -c], [-a, c, 0]])
    if abs(a**2+b**2+c**2-1) > 1e-5:
        return False
    else:
        return np.dot(A,w)
```

↯ flottants
$u = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ ...

(2)

$$A.V = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab+ab \\ bc-bc \\ -ac+ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $rg(A) \leq 2$, et comme les 2 premières colonnes sont non colinéaires, on a :

$$\boxed{rg(f) = 2 \ ; \ \dim \operatorname{Ker}(f) = 3 - rg(f) = 1 \quad \text{et donc } \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{(c,a,b)\}}$$

[T. du rang]

(3) $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ avec $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$

Sachant que $a^2+b^2+c^2 = 1$, il est impossible d'avoir $a = 0 = b = c$.

En conséquence, l'une au moins de ces 3 coordonnées de u est non nulle.

- si $a \neq 0$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{(0,b,-a), (a,-c,0)\}$
- si $b \neq 0$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{(0,b,-a), (-b,0,c)\}$
- si $c \neq 0$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{(-b,0,c), (a,-c,0)\}$

(4) Il suffit de vérifier l'orthogonalité pour les vecteurs de bases de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Si on note $X = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -a \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} a \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors

$${}^tX.C_1 = 0 = {}^tX\,C_2 = {}^tX\,C_3$$

Conclusion : Quelle que soit la base de $\operatorname{Im} f$ obtenue en (3), on vient d'obtenir que :

$$\forall x \in \operatorname{Ker} f, \ \forall y \in \operatorname{Im} f, \ (x|y) = 0$$

(5) $\forall x \in \mathbb{R}^3$, en notant $X = \mathcal{M}_B(x)$, on a :

$$\langle f(x), x\rangle = {}^t(AX).X = {}^tX\,{}^tA\,X = {}^tX(-AX) = -{}^tXAX$$

$$= \langle x, f(x)\rangle = {}^tXAX$$

$\Rightarrow 2\,{}^tXAX = 0 \Rightarrow {}^tXAX = 0$

Conclusion $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle f(x), x\rangle = 0}$

(6) Soit $\lambda \in Sp(f)$. Alors $\exists x \in \mathbb{R}^3,\ x \neq 0 \mid f(x) = \lambda x$ et d'après (5) :

$$\langle f(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2 = 0$$

D'où $\lambda = 0$ puisque $x \neq 0 \Leftrightarrow \|x\| \neq 0$.

Conclusion $\boxed{Sp(f) \subset \{0\}}$

(7) On a vu en (2) que $\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$ donc $0 \in Sp(f)$.

D'où $\boxed{Sp(f) = \{0\}}$; conclusion $\boxed{A \text{ non diagonalisable}}$

$\left(\begin{array}{l}\cdot \dim E_0 = 1 \neq 3 \\ \cdot \text{ or par l'absurde : } A \text{ diag.} \Rightarrow A = P0P^{-1} = 0 \ldots\end{array}\right)$

(8) $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid C = A^2 + I_3$ où $C = \mathcal{M}_B(g)$

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2-a^2 & ac & bc \\ ac & -b^2-c^2 & ab \\ bc & ab & -a^2-c^2 \end{pmatrix}$$

$$V\,{}^tV = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & ac & bc \\ ac & a^2 & ab \\ bc & ab & b^2 \end{pmatrix}$$

on conclut en rappelant que $a^2+b^2+c^2 = 1$.

Soit $\boxed{C = V.{}^tV}$

b) ${}^tC = {}^t(V\,{}^tV) = V\,{}^tV = C \Rightarrow C \in S_3(\mathbb{R})$

Conclusion $\boxed{C \text{ est diagonalisable.}}$

c) $\mathrm{rg}(V\,{}^tV) = 1$ et $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Vect}\{V\}$

$\Rightarrow 0 \in Sp(C)$ avec $\dim E_0(C) = 2$; $C.V = V\,{}^tV.V = V \Rightarrow 1 \in Sp(C)$ et $E_1(C) = \mathrm{Vect}\{V\}$

conclusion $\boxed{Sp(C) = \{0, 1\}}$