$\boxed{\text{Exercice 29}}$ $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\geq n,\ f_n(x)=\int_n^x e^{\sqrt{t}}\,dt$

① a) $t\mapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue sur $[n,+\infty[$
Donc

$$\boxed{\begin{array}{l} f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [n,+\infty[\\ \text{et } \forall x\geq n,\ f_n'(x)=e^{\sqrt{x}} \end{array}}$$

b) $\forall t\geq n,\ \sqrt{t}\geq\sqrt{n} \Rightarrow e^{\sqrt{t}}\geq e^{\sqrt{n}}$

et donc $f_n(x)\geq e^{\sqrt{n}}\int_n^x dt = (x-n)e^{\sqrt{n}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x-n)e^{\sqrt{n}}=+\infty$

Donc, par théorème de comparaison des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f_n(x)=+\infty}$$

c) $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n(n)=\int_n^n e^{\sqrt{t}}\,dt=0$

f_n est continue sur $[n,+\infty[$, strictement croissante sur $[n,+\infty[$ (puisque $f_n'(x)>0$)
donc f_n est une bijection de $[n,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$

Or $1\in\mathbb{R}_+$ donc $\boxed{\exists!\,u_n\in[n,+\infty[\ /\ f_n(u_n)=1.}$

② a) D'après ce qui précède :

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>n$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n=+\infty}$

b) $\forall n\in\mathbb{N}$, on applique le théorème des accroissements finis à f_n sur l'intervalle $[n,u_n]$ sur lequel f_n est de classe C^1.

Alors, $\exists c\in]n,u_n[\ /$

$f_n(u_n)-f_n(n)=(u_n-n).f_n'(c)$

$\Leftrightarrow 1=(u_n-n)e^{\sqrt{c}}$

or $n < c < u_n$ donc $\sqrt{n} < \sqrt{c} < \sqrt{u_n}$ (car $t \mapsto \sqrt{t}$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$)

et $e^{\sqrt{n}} < e^{\sqrt{c}} < e^{\sqrt{u_n}}$ car $t \mapsto \exp(t)$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $e^{\sqrt{n}}(u_n - n) < 1 < (u_n - n)e^{\sqrt{u_n}}$

ou encore $\begin{cases} u_n - n < e^{-\sqrt{n}} \\ e^{-\sqrt{u_n}} < u_n - n \end{cases}$ puisque $e^{\sqrt{n}} > 0$ et $e^{\sqrt{u_n}} > 0$

Conclusion $\boxed{e^{-\sqrt{u_n}} < u_n - n < e^{-\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}}$

c) $u_n - n < 10^{-4}$ dès que $e^{-\sqrt{n}} < 10^{-4}$

pour $n = 0$, $e^{-\sqrt{n}} = 1 > 10^{-4}$

$\Rightarrow$ on incrémente les valeurs de n tant que $\exp(-\sqrt{n}) \geq 10^{-4}$ et on retourne la 1ère valeur telle que $\exp(-\sqrt{n}) < 10^{-4}$

```
def valeur_de_n():
    n = 0
    while exp(-sqrt(n)) > 1e-4:
        n += 1
    return n
```

Cette fonction retourne $\boxed{n = 85}$

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - n$

a) $\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty = \lim_{n \to \infty} n$

D'où $\lim_{n \to \infty} e^{-\sqrt{u_n}} = 0 = \lim_{n \to \infty} e^{-\sqrt{n}}$

Conclusion $\boxed{\lim_{n \to \infty} v_n = 0}$ [théorème d'encadrement des limites]

b) C'est immédiat en élevant au carré...

En effet : $\forall x \geq -1$

$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4}$ $\square$

c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n+u_n-n}$

$$= \sqrt{1+\frac{u_n-n}{n}} \leq 1+\frac{u_n-n}{2n} = 1+\frac{v_n}{2n}$$

D'où

$$-\sqrt{u_n} \geq -\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}$$

et donc (exp est croissante sur $\mathbb{R}$)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \cdot e^{-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}}}$$

d) On utilise (2) b) et (3) c) :

$$e^{-\sqrt{n}} \, e^{-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}} \leq e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$$

et comme $e^{-\sqrt{n}} \neq 0$, on en déduit :

$$0 < e^{-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}} \leq \frac{u_n-n}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1$$

et comme $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{v_n}{2\sqrt{n}} = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-v_n/2\sqrt{n}} = 1$.

Conclusion par théorème d'encadrement des limites :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n-n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1 \iff \boxed{u_n - n \underset{\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}}$$

Rq : Pour (3) b) on pouvait aussi appliquer le TAF à $f : t \mapsto \sqrt{1+t}$ ...

- - -

Et pour c) on pouvait aussi ne pas utiliser la question (3) b) :

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que

$$e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}}\, e^{-\frac{u_n - n}{2\sqrt{n}}}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{u_n} \geq -\sqrt{n} + \frac{n - u_n}{2\sqrt{n}}$$ (car $t \mapsto \ln(t)$ ↗ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{n}.\sqrt{u_n} \geq -2n + n - u_n$$ (car $\sqrt{n} > 0$)

$$\Leftrightarrow n + u_n - 2\sqrt{n}\sqrt{u_n} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{n} - \sqrt{u_n})^2 \geq 0$$: vrai $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}}\, e^{-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}}}$