Exercice 28 Pour $x>0$, $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_0=1$ et $\forall n\geq 0$, $u_{n+1}=f(u_n)$

① a) $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ comme quotient de 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x>0,\quad f'(x)=\frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}=-\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$$

D'où $\forall x>0$, $f'(x)<0$: f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘ 0

b) D'après ce qui précède,

$f(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}_+^*$

or $u_0=1\in\mathbb{R}_+^*$ donc $u_1=f(u_0)\in\mathbb{R}_+^*$.

On montre alors par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\mathbb{R}_+^*$

[$u_0\in\mathbb{R}_+^*$ et si $u_n\in\mathbb{R}_+^*$ alors $u_{n+1}=f(u_n)\in\mathbb{R}_+^*$ ...]

__Conclusion__ La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie

② a) $f(x)\geq x \Leftrightarrow f(x)-x\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{-x}}{x}-x\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{-x}-x^2}{x}\geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}\geq x^2$ puisque $x>0$

$\Leftrightarrow -x\geq \ln(x^2)=2\ln(x)$

$\Leftrightarrow 2\ln(x)+x\leq 0$

Soit $h(x)=2\ln(x)+x$; $h'(x)=\dfrac{2}{x}+1>0\ \forall x>0$

h est croissante strictement sur $\mathbb{R}_+^*$.

avec $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=+\infty$

or h continue sur $\mathbb{R}_+^*$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc c'est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$ donc $\exists! a \in \mathbb{R}_+^* \,/\, h(a) = a$.

<u>conclusion</u> $\boxed{\exists! a \in \mathbb{R}_+^* \,/\, f(a) = a}$

On peut même ajouter que $f(x) \geq x \;\forall x \in]0,a]$ et $f(x) < x \;\forall x \in]a,+\infty[$.

b) $h(1/e) = 2\ln(1/e) + 1/e = -2 + \frac{1}{e} = \frac{1-2e}{e} < 0$

$h(1) = 2\ln(1) + 1 = 1 > 0$

<u>Conclusion</u> $\boxed{\frac{1}{e} < a < 1}$

c) Soit ici $g(x) = f(x) - x = e^{-x}/x - x$

D'après a) + b), g est décroissante, positive sur $]0,a]$, négative sur $]a,+\infty[$.

On écrit :

```
g = lambda x: np.exp(-x)/x - x
def dichotomie():
    a,b = 1/np.e, 1
    while np.abs(b-a) >= 1e-3:
        c = (a+b)/2
        if g(c) > 0:
            a = c
        else:
            b = c
    return (a+b)/2
```

Cette fonction retourne $\boxed{a = 0{,}703 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

③ a) On rappelle que $a < u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = e^{-1} < a$

Notons qu'il suffit de montrer que $a < u_0 < u_2$ car nous savons que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$f(a) = a > f(u_0) > f(u_2)$$

ou encore : $\underline{u_3 < u_1 < a}$.

Comme $a < u_0$, il suffit de montrer que $u_0 = 1 < u_2$

$u_2 = f(u_1) = \frac{e^{-u_1}}{u_1} = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e e^{-1/e} = e^{1-1/e}$

or $2 < e < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{e} < -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1-\frac{1}{e} < \frac{2}{3}$

Donc $0 < 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow e^0 < e^{1-1/e}$ car exp est croissante.

Soit $1 = u_0 < u_2$ et donc et par conséquent $\boxed{\begin{array}{l} a < u_0 < u_2 \\ u_3 < u_1 < a \end{array}}$

b) On utilise ici que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on raisonne par récurrence :

(i) initialisation : $a < u_0 < u_2$
(ii) on suppose que $u_{2n} < u_{2n+2}$ pour n fixé $(n \geq 0)$
(iii) on compose par $f \circ f$ qui est croissante
$f \circ f(u_{2n}) < f \circ f(u_{2n+2}) \Leftrightarrow u_{2n+2} < u_{2n+4}$
(iv) Conclusion $\boxed{(u_{2n})_{n \geq 0} \text{ est croissante}}$

un raisonnement identique permet de montrer que

$\boxed{(u_{2n+1})_{n \geq 0} \text{ est décroissante}}$

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, l'une vers l et l'autre vers l', alors $l' < a < l$

Conclusion : $\boxed{\text{Elles ne peuvent pas converger vers la même limite ...}}$

Et par conséquent, (u_n) diverge car si (u_n) CV alors toute suite extraite converge vers la même limite.

(4) a) $\forall x > 0$, $h(x) = f[f(x)] = \frac{e^{-e^{-x}/x}}{e^{-x}/x} = x e^{x} e^{-e^{-x}/x}$

Soit $\boxed{h(x) = x e^{\frac{x^2 - e^{-x}}{x}}}$

h est continue sur $]0, +\infty[$ par composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$

Il s'agit donc de montrer que h est continue en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 - e^{-x} = -1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2 - e^{-x}}{x} = -\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{x^2 - e^{-x}}{x}} = 0$

Soit $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$

Conclusion $\boxed{h \text{ est continue en } 0}$

b) $h(x) = x \Leftrightarrow x e^{\frac{x^2 - e^{-x}}{x}} = x \Leftrightarrow x\left[e^{\frac{x^2 - e^{-x}}{x}} - 1\right] = 0.$

Dès lors,

$h(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{\frac{x^2 - e^{-x}}{x}} = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\frac{x^2 - e^{-x}}{x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - \frac{e^{-x}}{x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $f(x) = x$

or, en ② a) on a vu que l'unique solution de $f(x) = x$ est $x = a$

Conclusion $\boxed{h(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = a}$

c) la suite $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0

En effet $\forall x > 0$, $h(x) = x e^{\frac{x^2 - e^{-x}}{x}} > 0$

or $u_1 = \frac{1}{e} > 0$; on suppose $u_{2n+1} > 0$ (n fixé) $n \geq 0$.

dès lors, $u_{2n+3} = f\left[f(u_{2n+1})\right] = h(u_{2n+1}) > 0$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} > 0$.

Conclusion $\boxed{\text{la suite } (u_{2n+1})_{n\geq 0} \text{ converge}}$

soit $l' = \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}$.

Alors $l' = h(l') \Leftrightarrow l' = 0$ ou $l' = a$ car h est continue sur $\mathbb{R}+$

or $u_3 < u_1 = \frac{1}{e}$ donc $\underline{l' < \frac{1}{e} < a}$

Conclusion $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = l' = 0}$

d) la suite $(u_{2n})_{n\geq 0}$ est croissante.

On montre qu'elle diverge en raisonnant par l'absurde.

Soit $l \in \mathbb{R}+ \mid \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = l$

alors $l > u_0 = 1$ avec $h(l) = l \Leftrightarrow l = 0$ ou $l = a$

mais $\frac{1}{e} < a < 1$ d'après 2 b).

Donc $l > 1$ est absurde.

Conclusion $\boxed{\text{la suite } (u_{2n}) \text{ diverge.}}$