SUJETS D'ANALYSE

Exercice 25 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

① Monotonie de f :

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2(x+1)} < 0.$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Limite en 0 de f : $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(x\ln(x) - x\ln(x+1) + 1\right)$

$\underset{x\to 0}{lim} x\ln(x) = 0$ (par croissance comparée) et $\underset{x\to 0}{lim} x\ln(x+1) = 0$

donc $\underset{x\to 0}{lim} x\ln(x) - x\ln(x+1) + 1 = 1$: ainsi $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et par conséquent $\underset{x\to 0}{lim} f(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$ de f : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \dfrac{1}{x}$

$\underset{x\to+\infty}{lim} \dfrac{x}{x+1} = 1$ donc $\underset{x\to+\infty}{lim} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$, de plus $\underset{x\to+\infty}{lim} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = 0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

f étant continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $f(\mathbb{R}_+^\star) = \mathbb{R}_+^\star$. Comme $1 \in \mathbb{R}_+^\star$, il admet un unique antécédent α par f dans $\mathbb{R}_+^\star$.

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 1 \text{ admet une unique solution } \alpha.}$$

② $f(1/2) = \ln(1/2) - \ln(3/2) + 2 = 2 - \ln(3) \approx 0.9$ et $f(1/3) = \ln(1/3) - \ln(4/3) + 3 = 3 - \ln(4) = 3 - 2\ln(2) \approx 1.61$.

On en déduit que $f(1/2) \leq f(\alpha) \leq f(1/3)$ et comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, on conclut que

$$\boxed{\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}}.$$

③ Fonction qui qui renvoie α à 10^{-n} près :

```python
def dicho(f, a, b, n):
    c = (a + b)/2
    while (b - a) > 10**(-n) :
        if (f(a) - 1) * (f(c) - 1) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
        c = (a + b)/2
    return round(c,n) # arrondi à 10^{-n} près

def f(x):
    return log(x) - log(x + 1) + 1/x

print(dicho(f,1/3,1/2,6)) # donne 0.465941
```

Le dernier intervalle $[a, b]$ est tel que $b - a \leq 10^{-n}$.
Comme c est le milieu et $\alpha \in [a, b]$, alors $|c - \alpha| \leq \frac{10^{-n}}{2}$.
Notons r l'arrondi de c à 10^{-n} près (`round(c,n)`) ; ce nombre r vérifie $|c - r| \leq \frac{10^{-n}}{2}$.
On a donc $|r - \alpha| \leq 10^{-n}$: r est une valeur approchée de α à 10^{-n} près.
On obtient $\alpha = 0.465941$ à 10^{-6} près.

④ $\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Montrons que Φ est une densité de probabilité :

— Comme $\alpha > 0$, tout réel $x > \alpha$ est positif donc $\Phi(x) > 0$ pour tout $x > \alpha$.
Donc Φ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

— Φ est clairement continue sur $]-\infty, \alpha[$ et sur $]\alpha, +\infty[$.

— Reste à prouver que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{+\infty} -f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\alpha}^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x.$

f' est continue sur $[\alpha, +\infty[$. f (qui est l'une de ses primitives) admet une limite finie en $+\infty$ donc $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} f(x) - f(\alpha) = 0 - 1 = -1$ donc on a bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Conclusion : $\boxed{\Phi \text{ est une densité de probabilité}}$.

⑤ Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument ce qui revient à montrer que $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument :

Sur $]\alpha, +\infty[$, $t\Phi(t) > 0$ donc $|t\Phi(t)| = t\Phi(t) = \dfrac{1}{t(t+1)}$.

Il est clair que pour $t > 0$, $\dfrac{1}{t(t+1)} \leq \dfrac{1}{t^2}$ donc : $0 \leq |t\Phi(t)| \leq \dfrac{1}{t^2}, \forall t \in [\alpha, +\infty[$.

$\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est $t \mapsto \dfrac{-1}{t}$ qui admet une limite finie en $+\infty$ donc $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Comme $0 \leq |t\Phi(t)| \leq \dfrac{1}{t^2}, \forall t \in [\alpha, +\infty[$ et que $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, on conclut, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, que :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument}}.$$

⑥ Soit $t > \alpha$; $f'(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{1}{t(t+1)} - \dfrac{1}{t^2} = t\Phi(t) - \dfrac{1}{t^2}$.

⑦ Soit X une variable aléatoire admettant Φ pour densité.

D'après 5., $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc $E(X)$ existe.

$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t.$

Pour tout réel $t \in [\alpha, +\infty[$, posons $g(t) = t\Phi(t) = \dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$

g est continue sur $[\alpha, +\infty[$ et admet comme primitive la fonction $G : t \mapsto \ln(t) - \ln(t+1)$.

$G(t) = \ln\left(\dfrac{t}{t+1}\right)$ et $\underset{t\to+\infty}{lim} \dfrac{t}{t+1} = 1$ donc $\underset{t\to+\infty}{lim} G(t) =$
$undersetx \to 1lim \ln(x) = 0$.

Ainsi $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \underset{t\to+\infty}{lim} G(t) - G(\alpha) = 0 - \ln(\alpha) + \ln(\alpha+1).$

Comme α vérifie $f(\alpha) = 1$, on a donc $\ln(\alpha) - \ln(\alpha+1) = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$ et $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} - 1.$

En conclusion :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\alpha} - 1}.$$

Autre méthode :
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{+\infty} \left(f'(t) + \frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t = \underset{t\to+\infty}{lim} \left[f(t) - \frac{1}{t}\right]_{\alpha}^{+\infty} = 0 - f(\alpha) + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - 1.$

Comme $\dfrac{1}{3} \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$, on a donc $2 \leq \dfrac{1}{\alpha} \leq 3$ et $\boxed{1 \leq E(X) \leq 2}$.