Correction « Sujet 23 » :

① **a.** La fonction f est dérivable sur $[1, \infty[$ comme quotient de fonctions dérivables. De plus,

$$\forall x \in [1, \infty[, \quad f'(x) = \frac{2\ln x - \ln^2(x)}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln(x))}{x^2}.$$

Le signe de f' est donc celui de $x \in [1, \infty[\longmapsto 2 - \ln(x)$, et de plus, par croissances comparées, $\underset{x \to +\infty}{lim} f(x) = 0$. On déduit alors le tableau ci-dessous :

x	1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

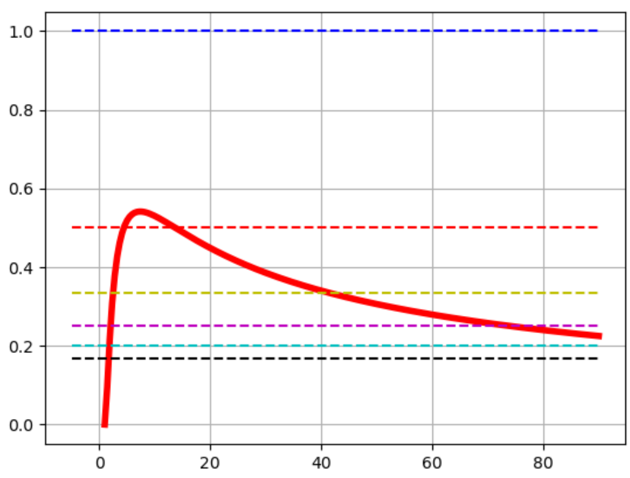
b. L'équation (E_1) est finalement $f(x) = 1$. Comme $\dfrac{4}{e^2} \approx 0.54 < 1$, par simple lecture du tableau ci-dessus on déduit que (E_1) n'admet pas de solution.

c. Supposons $n \geq 2$, alors $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{n} \in [0, f(e^2)[$. Puisque f est continue sur $[1, \infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[1, \infty[$, et que : $f(1) < \frac{1}{n} < \frac{4}{e^2}$, $\quad \frac{4}{e^2} > \frac{1}{n} > \underset{x \to +\infty}{lim} f(x)$, Par le théorème des valeurs intermédiaires on a l'existence de α_n et β_n solutions telles que $1 \leq \alpha_n \leqslant e^2 \leqslant \beta_n$.

② Choisissons de le faire par exemple avec `Python`

```python
f = lambda x:np.log(x)**2/x
X = np.linspace(1,90,200)
Lc = ['b','r','y','m','c','k']
plt.plot(X,f(X),'r', lw=4)
X1 = np.linspace(-5, 90, 100)
for i in range(1,7):
    plt.plot(X1,[1/i]*100,c = Lc[i-1], ls = '--')
plt.grid()
plt.show()
```

On retrouve sur le graphe ci-dessous : aucune solution lorsque $i = 1$, et deux solutions si $i \geq 2$.



③ On conjecture alors : la suite (α_n) semble **décroissante** et la suite (β_n) semble **croissante**.

④ **a.** Puisque $f(\beta_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(\beta_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a donc $f(\beta_{n+1}) < f(\beta_n)$. Puisque f est décroissante sur $[e^2, \infty[$, nous avons alors $\beta_{n+1} \geqslant \beta_n$. ***Conclusion*** : $\boxed{\text{La suite } (\beta_n) \text{ est alors croissante.}}$

b. La suite (β_n) est croissante donc (β_n) converge vers une limite finie ou diverge vers $+\infty$.
Supposons qu'elle converge vers une limite finie notée $l_1 \in \mathbb{R}$ dans la suite. En passant à la limite dans l'égalité $f(\beta_n) = \frac{1}{n}$, et en utilisant la continuité de f, on obtient $f(l_1) = 0$. C'est une contradiction car la fonction f ne s'annule pas sur $[e^2, +\infty[$. On en déduit que (β_n) diverge et donc :
Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty.}$

c. Par hypothèse (relation vérifiée par β_n), nous avons pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln^2(\beta_n) = \frac{\beta_n}{n} = u_n \Leftrightarrow \ln^2(nu_n) = u_n.$$

Calculons $\dfrac{u_n}{\ln^2(n)}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{\ln^2(n)} &= \frac{\ln^2(nu_n)}{\ln^2(n)} \\ &= \left(\frac{\ln n + \ln u_n}{\ln n}\right)^2 = \left(1 + \frac{\ln u_n}{\ln n}\right)^2.\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln u_n}{\ln n} = 0$ par hypothèse. Ainsi : ***Conclusion*** : $\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln^2(n).}$

d. Comme $\beta_n = nu_n$ pour tout entier n, nous déduisons :
Conclusion : $\boxed{\beta_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln^2(n).}$

⑤ On réadapte les points précédents à cette nouvelle suite.

a. La suite (α_n) est cette fois-ci décroissante, puisque $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$.
On a donc $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$. Puisque f est croissante sur $[1, e^2[$, nous avons alors $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$.
Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (\alpha_n) \text{ est alors décroissante.}}$

Elle est de plus minorée par un, donc converge vers une limite finie notée $l_2 \in \mathbb{R}$. Nous avons, de manière similaire à précédemment (en passant à la limite et en invoquant la continuité de f, la relation $f(l_2) = 0$. Donc $l_2 = 1$. Donc ***Conclusion*** : $\boxed{\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1.}$

b. On a : $\ln^2(\alpha_n) = \dfrac{\alpha_n}{n}$ d'où : $n\ln^2(\alpha_n) = \alpha_n$. Cette fois-ci, comme $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, on peut faire un développement limité du membre de gauche. En effet, $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u - 1$ donc

$$n(\alpha_n - 1)^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha_n \underset{n\to\infty}{\sim} 1.$$

Donc ***Conclusion*** : $\boxed{\alpha_n - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$ car $\alpha_n \geq 1$ pour tout n.

Quant à la vérification informatique, le premier point consiste à écrire l'algorithme de Dichotomie pour avoir une bonne valeur approchée de α_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, on vérifie la convergence vers 1 de la suite $(\sqrt{n}(\alpha_n - 1))$ par exemple en traçant les termes successifs.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

plt.close("all")

def dicho(a,b,f,prec):
        while b-a>prec:
                c = (a+b)/2
                if f(a)*f(c) <= 0:
                        b=c
                else:
                        a=c
        return (a+b)/2


f=lambda x:(np.log(x)**2)/x

N=np.linspace(1,100,100)
L=[np.sqrt(k)*(dicho(1,np.exp(1)**2,lambda x:(f(x)-1/k),0.001)-1) for k in range(1,101)]
plt.plot(N, L, 'r.')
plt.show()
```