Exercice 21

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x+t}\,dt.$

(1) a) C'est une question de cours.
On rappelle que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On pourra donc écrire :

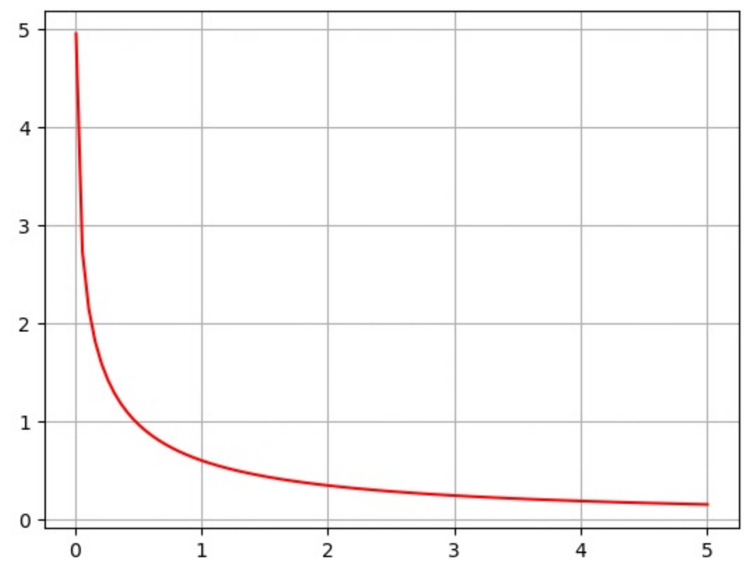
import numpy as np

```
f = lambda x, t : np.cos(t) / (x+t)
def approxf(x : float) -> float:
    n = 100
    S = 0
    for k in range(n):
        S += f(x, k/n):
    return S / n
```

b) On va tracer une approximation du graphe de la fonction f sur l'intervalle $]0, b]$ en prenant soin de ne pas prendre $x = 0$...

```
import matplotlib.pyplot as plt
def approxGraphe_f(b):
    X = np.linspace(0.01, b, 100)
    Y = [approxf(x) for x in X]
    plt.plot(X, Y, 'r')
    plt.show()
```

On obtient la représentation graphique suivante :



② Soient $(x, x') \in \mathbb{R}_+^{*2}$ / $x < x'$.

$$f(x) - f(x') = \int_0^1 \left(\frac{\cos t}{x+t} - \frac{\cos t}{x'+t} \right) dt$$ [linéarité de l'intégrale]

$$= \int_0^1 \cos(t) \cdot \frac{x' - x}{(x+t)(x'+t)} \, dt$$

or $x' - x > 0$; $\begin{cases} \cos(t) > 0 & \forall t \in [0,1] \\ x+t > 0 & \forall (x, x') \in \mathbb{R}_+^{*2} \\ x'+t > 0 \end{cases}$

Donc, $\forall t \in [0,1]$, $\cos(t) \dfrac{x' - x}{(x+t)(x'+t)} > 0$

les bornes d'intégration étant « dans le bon sens »,
on obtient :

$$f(x) - f(x') > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x')$$

Conclusion $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$

③ $\forall x > 0$, $t \longmapsto \dfrac{\cos(t)}{x+t}$ est positive sur $[0,1]$

Par positivité de l'intégrale $(0<1)$, on a $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

On conclut par le théorème de la limite monotone.

$\boxed{f \text{ admet une limite en } +\infty}$

④ a) $\forall x \geqslant \frac{x_0}{2} > 0$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \int_0^1 \cos(t) \frac{x_0 - x}{(x+t)(x_0+t)} dt \right| \leq \int_0^1 |\cos(t)| \cdot \frac{|x_0 - x|}{|x+t||x_0+t|} dt$$

or $t \in [0,1]$
donc

(•) $0 < |\cos(t)| = \cos(t) \leq 1$

(••) $|x_0 + t| = x_0 + t \geq x_0$

(•••) $|x+t| = x+t \geq \frac{x_0}{2} + t \geq \frac{x_0}{2}$

$\Big\} \Rightarrow |x_0+t||x+t| \geqslant \dfrac{x_0^2}{2} > 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|x_0+t| \cdot |x+t|} \leq \dfrac{2}{x_0^2}$

Conclusion $\boxed{\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[, \ |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}}$

$\left[\int_0^1 dt = 1 \ldots \right]$

3) Par application du théorème d'encadrement des limites, on a pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0 \text{ ou encore } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Conclusion $\boxed{f \text{ est continue en } x_0}$

(5) $\forall t \in [0,1]$, $0 < x < x+t < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+t} < \frac{1}{x}$

et $\cos(t) > 0$ donc $0 < \frac{\cos(t)}{x+1} < \frac{\cos(t)}{x+t} < \frac{\cos(t)}{x}$

En intégrant (les bornes sont dans le "bon sens"):

$$\frac{1}{x+1}\int_0^1 \cos(t)\,dt < f(x) < \frac{1}{x}\int_0^1 \cos(t)\,dt$$ [linéarité de l'intégrale]

ou encore:
$$\frac{\sin(1)}{x+1} < f(x) < \frac{\sin(1)}{x}$$

Conclusion: $\boxed{\text{Soit } A = \sin(1). \text{ Alors pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*: \quad \frac{A}{x+1} < f(x) < \frac{A}{x}}$

On retrouve, par application du théorème d'encadrement des limites, que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, ce qui est cohérent avec notre représentation graphique.

Par ailleurs $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{\sin(1)}{x}} = 1$ [car $\frac{x}{x+1} \underset{\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1$]

Donc $\boxed{f(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{\sin(1)}{x}}$

(6) a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t) - 1}{x+t}\,dt$

On admet que $\forall t \in [0,1]$, $|\cos(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2}$.

Alors (Inégalité triangulaire)

$$|g(x)| \leq \int_0^1 \frac{|\cos(t)-1|}{x+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{x+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^2}{2t}\,dt = \int_0^1 \frac{t}{2}\,dt$$

Conclusion $\boxed{\forall x > 0, \ |g(x)| \leq \frac{1}{4}}$

car $x+t > t \ \forall x > 0$
Donc $\frac{1}{x+t} < \frac{1}{t}$ ...

b) D'après ⑥ a) : $|g(x)| = \left| \int_0^1 f(x) - \int_0^1 \frac{dt}{x+t} \right| \leq \frac{1}{4}$

or $\int_0^1 \frac{dt}{x+t} = \left[\ln(|x+t|)\right]_0^1 = \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

Donc, $\forall x > 0$:

$$-\frac{1}{4} \leq f(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{4}$$

ou encore :

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{f(x)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - 1\right) = 0$$

théorème d'encadrement des limites avec $\lim_{x \to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$

Soit $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$

Conclusion $\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Rq $\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(1/x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x)}{-\ln(x)}$

$= \lim_{x \to 0}\left[1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right] = 1$

on rappel que la composition par 'ln' sur les équivalents n'est pas au programme...

Donc $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{0^+}{\sim} \ln(1/x)$

Conclusion $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$