$\boxed{\text{Exercice 113}}$ (oral Agro-Véto 2023)

① $q \in]0,1[$ $\quad S_{m,n}(q) = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} q^{k-m}$ si $0 \le m \le n$

a) $(1-q)S_{m,n}(q) = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} q^{k-m} - \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} q^{k-m+1}$

$i=k-1$ $\quad = \sum_{i=m-1}^{n-1} \binom{i+1}{m} q^{i-m+1} - \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} q^{k-m+1}$

$$= \binom{m}{m} q^0 + \sum_{k=m}^{n-1} \underbrace{\left[\binom{k+1}{m} - \binom{k}{m}\right]}_{=\binom{k}{m-1}} q^{k-m+1} - \binom{n}{m} q^{n+1-m}$$

car d'après la F. de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$...

$$= 1 + \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m-1} q^{k-m+1} - \binom{n}{m} q^{n+1-m}$$

$$= \sum_{k=m-1}^{n-1} \binom{k}{m-1} q^{k-m+1} - \binom{n}{m} q^{n+1-m}$$

Conclusion $\boxed{(1-q)S_{m,n}(q) = S_{m-1,n-1} - \binom{n}{m} q^{n+1-m} \quad (1 \le m \le n)}$

b) $\sum_{k \ge m} \binom{k}{m} q^{k-m}$ de somme partielle $S_{m,n}(q)$

• $S_{0,n-m}(q) = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{k}{0} q^{k-0} = \sum_{k=0}^{n-m} q^k = \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$.

Donc $\lim_{n\to\infty} S_{0,n-m}(q) = \dfrac{1}{1-q}$: $\sum_{k\ge 0} q^k$ CV ok

Autrement dit ... $S_{0,n-m}$ est une somme partielle de la série géométrique de raison q convergente car $0<q<1$

on a $\sum_{k\ge 0} \binom{k}{0} q^k$ CV de somme $\dfrac{1}{1-q} = \lim_{n\to\infty} S_{0,n-m}(q)$

Par ailleurs, pour tout m entier naturel :

$$\binom{n}{m} q^{n+1-m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} q^{n+1-m} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^m}{m!} q^{n+1-m}$$

ou encore, $\binom{n}{m} q^{n+1-m} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{q^{1-m}}{m!} n^m . q^n$

or $\lim\limits_{n\to\infty} n^m q^n = 0$ puisque $\forall m>0,\ n^m = o(a^n)\ \forall a>1$.

Dès lors, en rappelant que $S_{m-1,n-1}(q)$ est une somme partielle de $\sum\limits_{k\geq m-1} \binom{k}{m-1} q^{k-(m-1)}$, on obtient que

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{0,n-m}(q)$ existe $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{1,n-m+1}(q)$ existe

et "de proche en proche"... on obtient que

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{m,n}(q)$ existe ou encore $\boxed{\sum\limits_{k\geq m} \binom{k}{m} q^{k-m} \text{ CV}}$

c) $S_m(q) = \sum\limits_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} q^{k-m}$ 　　　 (!) Énoncé... confusion entre somme et série

La question précédente donne

$$(1-q)\,S_m(q) = \lim_{n\to\infty} \left[S_{m-1,n-1}(q) - \binom{n}{m} q^{n+1-m} \right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} S_{m-1,n-1}(q) = S_{m-1}(q) \quad \square$$

d) $S_0 = \dfrac{1}{1-q}$; $S_1 = \dfrac{1}{(1-q)^2}$

on suppose que $S_{m-1}(q) = \dfrac{1}{(1-q)^m}$

Alors $S_m(q) = \dfrac{1}{1-q} S_{m-1}(q) = \dfrac{1}{(1-q)^{m+1}}$.

Conclusion $\boxed{\forall m\geq 0,\ S_m(q) = \dfrac{1}{(1-q)^{m+1}}}$

Remarque $\sum\limits_{k\geq 1} k(k-1) q^{k-2} = \sum\limits_{k\geq 2} 2 \cdot \binom{k}{2} q^{k-2}$ CV de somme $\dfrac{2}{(1-q)^3}$

D'où, d'après notre programme sur les séries géométriques :

$\sum\limits_{k\geq 2} \binom{k}{2} q^{k-2}$ CV et $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \binom{k}{2} q^{k-2} = S_2(q) = \dfrac{1}{(1-q)^3}$

(2) Soit P_k l'évt : "obtenir Pile au $k^{\text{ième}}$ lancer"

a)
```
def simulX(m,p):        # m >= 1
    X , NP = 0 , 0      # Nb de lancers et de Piles nuls.
    while NP < m:
        NP += int(rdm.random()<p)
        X += 1
    return X
```

Pour estimer l'espérance de X, on pourra faire appel à la loi faible des grands nombres en calculant la moyenne expérimentale des issues supposées indépendantes d'un grand nombre d'appel à la fonction simulX( ).
Soit :

```
>> sum([simulX(m,p) for _ in range(10 000)])/10 000
```

ce qui renvoie $\mathbb{E}(X_4) \simeq 8$ pour $p=1/2$
$\simeq 12$ pour $p=1/3$

b) $X_m(\Omega) = [\![m, +\infty[\![$

$\forall n \in [\![m,+\infty[\![,\ \mathbb{P}(X_m=n) = \mathbb{P}(A_{m-1,n-1}).\mathbb{P}(P_n)$

où $A_{m-1,n-1}$ est l'évènement : "obtenir $(m-1)$ Pile au cours des $n-1$ premiers lancers"
On reconnait un schéma binomial.
D'où
$$\mathbb{P}(A_{m-1,n-1}) = \binom{n-1}{m-1} p^{m-1} q^{n-m}$$

Conclusion $\boxed{\mathbb{P}(X_m=n) = \binom{n-1}{m-1} p^m q^{n-m} \quad \forall n \geq m}$

c) On étudie $\sum_{k\geqslant m} k\mathbb{P}(X_m=k) = \sum_{k\geqslant m} k\binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$
$$= \sum_{k\geqslant m} m\binom{k}{m} p^m q^{k-m}$$
série de même nature que $\sum_{k\geqslant m} \binom{k}{m} q^{k-m}$ qui converge d'après ①

D'où $\mathbb{E}(X_m)$ existe et $\mathbb{E}(X_m) = mp^m \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} q^{k-m}$

Conclusion $\boxed{\mathbb{E}(X_m) = \frac{mp^m}{(1-q)^{m+1}} = \frac{mp^m}{p^{m+1}} = \frac{m}{p}}$

Remarque : Pour $m=1$, on retrouve bien l'espérance de la loi géométrique de paramètre p...
On peut aussi considérer que $X_m = \sum_{k=1}^{m} T_k$ où $T_k \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et on retrouve (linéarité) que
$$\mathbb{E}(X_m) = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}(T_k) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p} = \frac{m}{p}.$$

d) Soit $Y_n = X_n(X_n+1)$; $E(Y_n)$?

On étudie $\sum_{k\geq n} k(k+1)P(X_n=k) = \sum_{k\geq n} k(k+1)\binom{k-1}{n-1}p^n q^{k-n}$

!) = théorème de Transfert.

or $k\binom{k-1}{n-1} = n\binom{k}{n}$ et $(k+1)\binom{k}{n} = (n+1)\binom{k+1}{n+1}$

D'où

$$\sum_{k\geq n} k(k+1)P(X_n=k) = \sum_{k\geq n} n(n+1)\binom{k+1}{n+1}p^n q^{k-n}$$

qui est de même nature que

$$\sum_{k\geq n}\binom{k+1}{n+1}q^{k-n} \underset{i=k+1}{=} \sum_{i\geq n+1}\binom{i}{n+1}q^{i-(n+1)}$$

qui est une série convergente d'après (1) de somme

$$S_{n+1}(q) = \frac{1}{(1-q)^{n+2}}$$

Conclusion $\boxed{E(Y) \text{ existe et } E(Y) = n(n+1)p^n\frac{1}{(1-q)^{n+2}} \text{ Soit } E(Y) = \frac{n(n+1)}{p^2}}$

Dès lors, d'après la formule de Koënig-Huygens,

$V(X_n) = E(X_n^2) - E^2(X_n) = E(X_n(X_n+1)) - E(X_n) - E^2(X_n)$

(par linéarité de l'espérance ...)

Conclusion $\boxed{V(X_n) \text{ existe et } V(X_n) = \frac{n(n+1)}{p^2} - \frac{n}{p} - \frac{n^2}{p^2} \text{ Soit } V(X_n) = \frac{n(n+1)-np-n^2}{p^2} = \frac{n(1-p)}{p^2} = n\frac{q}{p^2}}$

Remarque En considérant que $X_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$ où $T_k \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et en notant que les T_k sont mutuellement indépendantes, on retrouve immédiatement que

$$V(X_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k) = n\frac{q}{p^2}$$

③ a) $Y = X_4$ VAR égale au rang d'arrivée du 4ème succès au cours d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Conclusion

$$Y(\Omega) = [\![4, +\infty[\![\ ; \ \forall k \geq 4, \ P(Y=k) = \binom{k-1}{3}\left(\frac{1}{13}\right)^4\left(\frac{12}{13}\right)^{k-4}$$

$$E(Y) = 4 \times 13 = 52 \ ;$$

$$E(Y^2) = V(Y) + E^2(Y) = 4\left(1-\frac{1}{13}\right).13^2 + 52^2 = 3328$$

b) 

A chaque tirage, on obtient un numéro pair avec une probabilité $p = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

Dès lors $Z = X_n$ et donc :

$$Z(\Omega) = [\![n, +\infty[\![\ , \ \forall k \geq n, \ P(Z=k) = \binom{k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n}$$

$$= \binom{k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

$$E(Z) = \frac{n}{p} = 2n \ ; \ E(Z^2) = V(Z) + E^2(Z)$$

$$= n\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(1/2)^2} + 4n^2 = \frac{n}{2}.4 + 4n^2$$

$$= 2n(1+2n)$$