Exercice 112

① . f est positive sur $\mathbb{R}$
. f est continue sur $]-\infty;1[$ car constante égale à 0
continue sur $]1;+\infty[$ car $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ continue sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$
Donc f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ d'après la relation de Chasles.
Soit $G(t) = \int_1^t \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$
$\lim\limits_{t\to+\infty} G(t) = 1$ donc $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ converge et vaut 1
ou encore $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$

② $X(\Omega) = [1;+\infty[$ (support de f, densité de X).
Donc, $\forall x<1$, $F_X(x) = P(X\leq x) = P(\emptyset) = 0$
$\forall x \geq 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \underset{\text{R. de Chasles}}{=} \int_1^x f(t)dt \underset{\text{d'après ①}}{=} 1 - \frac{1}{x}$

Conclusion $\boxed{F_X(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)}$

③ a) $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0;1[}$ et $V = \frac{1}{1-U}$.

(i) $U(\Omega) =]0;1[\Rightarrow (1-U)(\Omega) =]0;1[\Rightarrow V(\Omega) =]1;+\infty[$.
(ii) $\forall x \leq 1$, $F_V(x) = P(V\leq x) = P(\emptyset) = 0$
(iii) $\forall x > 1$, $F_V(x) = P\left(\frac{1}{1-U} \leq x\right) = P\left(1-U \geq \frac{1}{x}\right) = F_U\left(1-\frac{1}{x}\right)$

or $x > 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} \in]0,1[$; d'où $F_U(1-\frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{x}$

on a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = F_X(x) \Leftrightarrow F_V = F_X$.

conclusion $\boxed{V = \frac{1}{1-U} \text{ suit la même loi que } X}$

b)
```
def X():
    return 1/(1-rdm.random())
```

c)
```
def Y():
    x = X()
    return x - int(x)
```

d)
```
def estim_EspY(m=10000):
    L = [Y() for _ in range(m)]
    return sum(L)/m
```

4) $\forall x \in [0,1[$,

FPT avec SCE : $\{\lfloor X \rfloor = k, k \in \mathbb{N}^*\}$ puisque $X(\Omega) = [1, +\infty[$

$$\begin{aligned} \underline{P(Y \leq x)} &= P(X - \lfloor X \rfloor \leq x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P[(X - \lfloor X \rfloor \leq x) \cap \lfloor X \rfloor = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P[(X \leq \lfloor X \rfloor + x) \cap \lfloor X \rfloor = k) \\ &= \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} P(k \leq X \leq k+x)} \end{aligned}$$

avec $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(k \leq X \leq k+x) = \sum_{k=1}^{\infty} [F_X(k+x) - F_X(k)]$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{k+x}\right) - \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$$

car $k + x \geq k \geq 1 > 0$

conclusion $\boxed{\forall x \in [0,1[, \ P(Y \leq x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)}$

!) Admis : $S \in C^1([0,1])$.

⑤ a) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, on applique le T.A.F à $x \mapsto \ln(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et donc fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t, t+1]$ $\forall t > 0$.
Dès lors :

$$\exists c \in]t, t+1[\ / \ \ln(t+1) - \ln(t) = (t+1-t)\frac{1}{c} = \frac{1}{c}$$

or $0 < t < c < t+1$ donc $\dfrac{1}{t+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{t}$

conclusion $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ \dfrac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \dfrac{1}{t}}$

b) (i) $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1)$$
$$= \frac{1}{n+1} - \underbrace{[\ln(n+2) - \ln(n+1)]}_{\leq \frac{1}{n+1}} \geq 0$$

Donc (u_n) croissante.

(ii) $$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$
$$= \frac{1}{n+1} - \underbrace{[\ln(n+1) - \ln(n)]}_{\geq \frac{1}{n+1}} \leq 0$$

Donc (s_n) décroissante.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_n - u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Donc $\lim\limits_{n \to \infty} (s_n - u_n) = 0$

conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{les suites } (u_n) \text{ et } (s_n) \text{ sont adjacentes.} \\ \text{Elles convergent donc vers une même limite} \\ \text{notée } \gamma \text{ par la suite}\end{array}}$

⑥ $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+t}\right) dt = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+t}\right) dt$$ [linéarité de l'intégrale)

$$= \sum_{k=1}^n \left[\int_0^1 \frac{1}{k}\, dt - \int_0^1 \frac{dt}{k+t}\right]$$ (linéarité de $\int$.)

Soit

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+t}\right)dt = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\left[\ln(\underbrace{k+t}_{>0})\right]_0^1\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\left(\ln(k+1)-\ln(k)\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln(k)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\left(\ln(n+1)-\ln(1)\right)$$ Télescopage

Conclusion $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^1 \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+t}\right)dt = u_n}$

(7) $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 S(t)\,dt - u_n = \int_0^1 S(t)\,dt - \int_0^1 \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+t}\right)dt$$ linéarité de $\int$.

$$= \int_0^1\left[S(t)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+t}\right)\right]dt$$

$$= \int_0^1\Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+t}\right)}_{\text{(d'après (4) ...)}}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+t}\right)\Bigg)dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+t}\right)dt$$

(i) $\forall t\in[0,1]$, $k+t\geq k>0$ donc $0<\frac{1}{k+t}\leq\frac{1}{k}$

D'où $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+t}\geq 0\quad \forall k\geq n+1$

Donc $\underline{\int_0^1 S(t)\,dt - u_n \geq 0}$ (positivité de l'intégrale)

(ii) Par application du T.A.F à la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[k,k+t]$ $\forall k\geq n+1$, $\forall t\in[0,1]$:

$\exists c\in]k,k+t[\ /\ \frac{1}{k+t}-\frac{1}{k}=(k+t-k)\left(-\frac{1}{c^2}\right)$

ou encore,

$\exists c\in]k,k+t[\ /\ \frac{1}{k}-\frac{1}{k+t}=\frac{t}{c^2}$

or $k < c < k+t$ donc $0 < \frac{1}{c^2} < \frac{1}{k^2}$
et donc
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+t} < \frac{t}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{car } t \in [0,1[.$$

Dès lors,
$$\int_0^1 S(t)dt - u_n \leq \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\, dt \quad \text{[croissance de l'intégrale]}$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \underbrace{\int_0^1 dt}_{=1}$$

Conclusion
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leq \int_0^n S(t)dt - u_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$$

8) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente [cf. cours sur les séries numériques].
Donc son Reste d'ordre n :
$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Il suffit d'appliquer le théorème d'encadrement des limites pour conclure :
$$\boxed{\int_0^1 S(t)dt = \lim_{n \to \infty} u_n = \gamma}$$

9) $E(Y)$? on étudie $I = \int_{-\infty}^{\infty} t f_Y(t)dt$

or $X(\Omega) = [1, +\infty[$
donc $Y(\Omega) = (X - \lfloor X \rfloor)(\Omega) = [0,1[$.   Rel$^\circ$ de Chasles.
D'où $f_Y(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus [0,1[$ et $I = \int_0^1 t f_Y(t)dt$.

Soit $I = \int_0^1 t S'(t)dt$; IPP : $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = S'(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = S(t) \end{cases}$

Notons que $S \in \mathcal{C}^1([0,1])$ d'après (6).

Donc $u, v \in \mathcal{C}^1([0,1])$

Par ailleurs $\lim\limits_{t \to 0} u(t)v(t) = \lim\limits_{t \to 0} tS(t) = \lim\limits_{t \to 0} t\mathbb{P}(Y \leq t)$
$= 0$

$\lim\limits_{t \to 1} u(t)v(t) = \lim\limits_{t \to 1} tS(t) = \lim\limits_{t \to 1} \mathbb{P}(Y \leq t)$
$= \mathbb{P}(Y \leq 1) = 1.$

Donc I est de même nature que

$J = \int_0^1 S(t)dt$ qui converge et vaut σ d'après (8).

Conclusion $\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{E}(Y) \text{ existe et} \\ \mathbb{E}(Y) = \lim\limits_{t \to 1} u(t)v(t) - u(0)v(0) - J = 1 - \sigma \end{array}}$