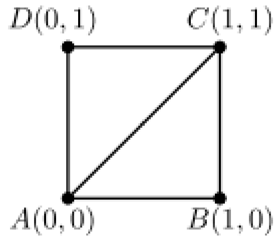
SUJETS DE PROBABILITES

Exercice 111 :



À l'instant $n = 0$, la particule se situe en A et à chaque étape, elle se déplace aléatoirement et de manière équiprobable vers l'un des sommets qu'elle peut atteindre en une étape.

1. Estimation de a_n :

```
import random as rd

def deplacement(x,y):
    """␣décrit␣le␣déplacement␣de␣la␣particule␣en␣partant␣du␣point␣(x,y);␣ren
      ␣le␣point␣de␣destination"""
    u = rd.random()
    if x == y: # point A ou C
        if u < 1/3:
            return (1 - x,y) # déplacement horizontal
        elif u < 2/3:
            return (x,1 - y) # déplacement vertical
        else:
            return (1 - x,1 - y) # déplacement en diagonale
    else:
        if u < 1/2:
            return (1 - x, y) # déplacement horizontal
        else:
            return (x, 1 - y) # déplacement vertical

def positionA(n):
    """simule␣N␣=␣10000␣fois␣l'expérience␣et␣renvoie␣la␣fréquence␣de␣passage
      la␣particule␣au␣point␣A␣à␣l'instant␣n"""
    c = 0
    N = 10000
    for k in range(N): # N simulations de n déplacements
        (x,y) = (0,0) # départ en A
        for i in range(n):
            (x,y) = deplacement(x,y)
        if (x,y) == (0,0): # la particule est en A à l'intant n
            c += 1
    return c/N

for n in [10,30,100,1000]:
    print(positionA(n))
```

   Le programme affiche 0.3032, 0.3015, 0.3009, 0.2967. Ce qui laisse penser que a_n est proche de $0,3$ lorsque n est grand.

2. A_n, B_n, C_n et D_n formant un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des

probabilités totales :
$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{D_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(D_n)$.
Étant donné les conditions de déplacements de la particule, on a :

$$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 0, \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{D_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$

Donc $\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}d_n}$.

Par analogie on a : $\boxed{c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n}$.

De même, $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(D_n)$.
On a : $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1}) = 0$.

D'où $\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n}$.

Par analogie on a : $\boxed{d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n}$.

3. Étude des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   a) Comme $b_0 = d_0 = 0$ et $b_{n+1} = d_{n+1}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = b_n$.

   Ainsi on a : $\begin{cases} a_{n+1} = b_n + \frac{1}{3}c_n & (L_1) \\ c_{n+1} = b_n + \frac{1}{3}a_n & (L_2) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + c_n) & (L_3) \end{cases}$

   D'où :

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{1}{3}(a_{n+1} + c_{n+1}) \quad \text{d'après } L_3 \\ &= \frac{1}{3}\left(2b_n + \frac{1}{3}(a_n + c_n)\right) \quad \text{d'après } L_1 + L_2 \\ &= \frac{1}{3}(2b_n + b_{n+1}) \quad \text{d'après } L_3 \end{aligned}$$

   $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$\boxed{b_{n+2} - \frac{1}{3}b_{n+1} - \frac{2}{3}b_n = 0}.$$

   L'équation caractéristique associée est : $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$. Ses racines sont 1 et $\frac{-2}{3}$.
   Donc il existe deux réels λ, μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \lambda + \mu\left(\frac{-2}{3}\right)^n$.
   Pour $n = 0$, $b_0 = 0$ et pour $n = 1$: $b_1 = \frac{1}{3}(a_0 + c_0) = \frac{1}{3}$.
   Donc λ et μ vérifie le système $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \frac{2}{3}\mu = \frac{1}{3} \end{cases}$ ce qui donne $\lambda = \frac{1}{5}$ et $\mu = \frac{-1}{5}$.
   Conclusion : $\boxed{b_n = \frac{1}{5}\left(1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)}$.

b) On a vu que $a_{n+1} + c_{n+1} = 3b_{n+2}$.

De là on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} + c_{n+1} = \dfrac{3}{5}\left(1 - \left(\dfrac{-2}{3}\right)^{n+2}\right)$.

Autrement dit, pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\boxed{a_n + c_n = \frac{3}{5}\left(1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^{n}}.$$

Ce qui est encore vrai pour $n = 0$ puisque $a_0 + c_0 = 1$.

c) On a $a_{n+1} - c_{n+1} = \dfrac{-1}{3}(a_n - c_n)$: la suite $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{-1}{3}$.

Il en résulte que $a_n - c_n = \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n (a_0 - c_0)$ soit $\boxed{a_n - c_n = \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n}$.

d) $$\begin{cases} a_n + c_n = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n \\ a_n - c_n = \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right) \\ c_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right) \end{cases}$$

Conclusion : $$\boxed{\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right) \\ c_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right) \\ b_n = d_n = \dfrac{1}{5}\left(1 - \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n\right) \end{cases}}$$

4. X_n et Y_n sont des variables aléatoires réelles correspondant respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée de la particule à l'instant n.

a) $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$: les variables X_n et Y_n sont des variables de Bernoulli.
$X_n = 1$ signifie que l'abscisse de la particule à l'instant n est égale à 1, autrement dit la particule est positionnée en B ou C à l'instant n.
Donc $(X_n = 1) = B_n \cup C_n$ et $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n)$ puisque les deux événements B_n et C_n sont incompatibles.
Ainsi $\mathbb{P}(X_n = 1) = b_n + c_n = \dfrac{1}{5}\left(1 - \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right)$ ce qui donne :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)}$$

X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right)$.

De même $(Y_n = 1) = D_n \cup C_n$ et $\mathbb{P}(Y_n = 1) = d_n + c_n = b_n + c_n$: Y_n a même loi que X_n.

$$\boxed{\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$;
— Cas $n = 0$: $X_0 = Y_0 = 0$ donc $\mathbb{P}((X_0 = 0) \cap (Y_0 = 0)) = 1 = \mathbb{P}(X_0 = 0) \times \mathbb{P}(Y_0 = 0)$.

$$\boxed{X_0 \text{ et } Y_0 \text{ sont indépendantes}}.$$

— Cas $n \geq 1$: nous allons montrer que X_n et Y_n ne sont pas indépendantes en montrant que $\mathbb{P}((X_n = 1) \cap (Y_n = 1)) \neq \mathbb{P}(X_n = 1) \times \mathbb{P}(Y_n = 1)$.
Comme X_n et Y_n sont des variables de Bernoulli, cela revient à montrer que leur covariance est non nulle.
En effet, X_nY_n est également une variable de Bernoulli (car $(X_nY_n)(\Omega) = \{0, 1\}$) donc

$$\mathbb{E}(X_nY_n) = \mathbb{P}(X_nY_n = 1) = \mathbb{P}((X_n = 1) \cap (Y_n = 1)).$$

D'autre part, $\mathbb{E}(X_n) \times \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{P}(X_n = 1) \times \mathbb{P}(Y_n = 1)$.
Montrer que $\mathbb{P}((X_n = 1) \cap (Y_n = 1)) \neq \mathbb{P}(X_n = 1) \times \mathbb{P}(Y_n = 1)$ revient à montrer que $\mathbb{E}(X_nY_n) \neq \mathbb{E}(X_n) \times \mathbb{E}(Y_n)$ i.e. $\text{Cov}(X_n, Y_n) \neq 0$.
On anticipe donc sur la question suivante en calculant $\text{Cov}(X_n, Y_n)$.

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) = \mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(Y_n).$$

$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(Y_n) = p_n = b_n + c_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right)$.
Par ailleurs, $\mathbb{E}(X_nY_n) = \mathbb{P}(X_nY_n = 1) = \mathbb{P}((X_n = 1) \cap (Y_n = 1)) = \mathbb{P}(C_n) = c_n$.
Donc $\text{Cov}(X_n, Y_n) = c_n - (b_n + c_n)^2$; on obtient après simplification

$$\boxed{\text{Cov}(X_n, Y_n) = \frac{1}{20} + \frac{1}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^n}.$$

Par l'absurde, supposons que l'on ait $\text{Cov}(X_n, Y_n) = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X_n, Y_n) = 0 &\iff \frac{1}{20} + \frac{1}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^n = 0 \\
&\iff 9^n + 4 \times \frac{(-2)^n}{3^n} \times 9^n - 5 = 0 \qquad \textit{(on a multiplié par } 20 \times 9^n\textit{)} \\
&\iff 5 = 9^n + 4 \times (-2)^n \times 3^n
\end{aligned}$$

On aboutit à une absurdité car n étant supérieur ou égal à 1, $9^n + 4 \times (-2)^n \times 3^n$ est un multiple de 3 : $9^n + 4 \times (-2)^n \times 3^n = 3k$ avec $k = 3^{2n-1} + 4(-2)^n \times 3^{n-1} \in \mathbb{Z}$.
Or il est clair que 5 ne peut s'écrire sous la forme $5 = 3k$.
En conclusion : $\text{Cov}(X_n, Y_n) \neq 0$.

$$\boxed{X_n \text{ et } Y_n \text{ ne sont pas indépendantes}}.$$

c) Calcul de la covariance : voir question précédente

5. Pour tout entier naturel n, on note maintenant $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

a) D'après 2., pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}d_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n \\ d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$ ainsi $U_{n+1} = MU_n$ avec

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}}.$$

b) On admet que $M^4 - \frac{7}{9}M^2 - \frac{2}{9}M = 0$. Soit λ une valeur propre de M. Alors il existe une matrice colonne X non nulle telle que $MX = \lambda X$.
Il est alors simple de vérifier que l'on a : $M^2X = \lambda^2 X$, $M^3X = \lambda^3 X$ et $M^4X = \lambda^4 X$.
On a donc : $\left(M^4 - \frac{7}{9}M^2 - \frac{2}{9}M\right)X = \lambda^4 X - \frac{7}{9}\lambda^2 X - \frac{2}{9}\lambda X = \left(\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda\right)X$.
On a aussi $\left(M^4 - \frac{7}{9}M^2 - \frac{2}{9}M\right)X = 0X = 0$ donc $\left(\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda\right)X = 0$ et comme $X \neq 0$, on en déduit que λ vérifie $\boxed{\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0}$.

c) 0 et 1 sont racines évidentes de l'équation $x^4 - \frac{7}{9}x^2 - \frac{2}{9}x = 0$.
En factorisant par $x(x-1)$ on obtient : $x^4 - \frac{7}{9}x^2 - \frac{2}{9}x = x(x-1)\left(x^2 + x + \frac{2}{9}\right)$.
On trouve les deux autres racines en calculant le discriminant $\Delta = \frac{1}{9}$.
Les racines du polynôme $x^2 + x + \frac{2}{9}$ sont alors $\frac{-1}{3}$ et $\frac{-2}{3}$.
On en déduit $x^4 - \frac{7}{9}x^2 - \frac{2}{9}x = 0 \iff x \in \left\{0, 1, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right\}$.
Ainsi les seules valeurs propres possibles de M sont : $0, 1, \frac{-1}{3}$ et $\frac{-2}{3}$.
Reste à étudier si ces valeurs sont oui ou non des valeurs propres de M en résolvant pour chacune d'elle le système $MX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

— Cas $\lambda = 0$:

$$MX = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}t = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}t = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y + 2z + 3t = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + 3y + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z = 0 \\ t = -y \end{cases}$$

Le système admet d'autre solutions que la solution nulle donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } M}$

et le sous-espace propre associé est $\boxed{E_0(M) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}}$.

— Cas $\lambda = 1$:

$$MX = X \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}t = x \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}t = z \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = t \end{cases} \iff \begin{cases} -6x + 3y + 2z + 3t = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 2x + 3y - 6z + 3t = 0 \\ x + z - 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z = \frac{3}{2}t \\ y = t \end{cases}$$

Le système admet d'autre solutions que la solution nulle donc $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } M}$

et le sous-espace propre associé est $\boxed{E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$.

— Cas $\lambda = \dfrac{-1}{3}$: de même on vérifie que $MX = \dfrac{-1}{3}X \iff \begin{cases} z = -x \\ y = t = 0 \end{cases}$.

Donc $\boxed{-1/3 \text{ est valeur propre de } M}$ et $\boxed{E_{-1/3}(M) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}$.

— Cas $\lambda = \dfrac{-2}{3}$: de même on vérifie que $MX = \dfrac{-2}{3}X \iff \begin{cases} x = z = -t \\ y = t \end{cases}$.

Donc $\boxed{-2/3 \text{ est valeur propre de } M}$ et $\boxed{E_{-2/3}(M) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}}$.

Conclusion : $\boxed{\text{sp}(M) = \left\{0, 1, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{-2}{3}\right\}}$.

$\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$ car elle admet quatre valeurs propres distinctes.

$M = PDP^{-1}$ avec $\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}}$.

d) $U_{n+1} = MU_n$ pour tout entier naturel n.
On en déduit par récurrence que $U_n = M^n U_0$ pour tout entier naturel n.

Or $M = PDP^{-1}$ donc $M^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2/3)^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 1$.

De plus, comme $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$ alors $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il suffit alors de calculer la première colonne de PD^nP^{-1} pour déterminer U_n.

0.0.1 Exercice sans préparation

1. Fonction `strict_croissante` :

```python
def strict_croissante(L):
    n = len(L)
    for i in range(n-1):
        if L[i+1] <= L[i]:
            return False
    return True
```

2. Fonction `strict_monotone` :

```python
def strict_monotone(L):
    L_inv = [] # liste en sens inverse
```

```
    n = len(L)
    for i in range(n-1,-1,-1):
        L_inv.append(L[i])
    return strict_croissante(L) or strict_croissante(L_inv)
```