SUJETS DE PROBABILITES

Exercice 110 :

① a) L'urne contient au départ 2 boules et chaque boule tirée est remise dans l'urne .
Donc N vaut au minimum 2 ($N = 2$ si la noire est tirée d'emblée).
Comme le nombre total de boules augmente de 1 après chaque tirage d'une blanche, on a :

$$\boxed{N(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$; $(N = k)$ est l'événement « l'urne contient k boules à l'issue de l'expérience ».
Cela signifie que $k-2$ boules blanches ont été ajoutées au total, donc il y a eu exactement $k-1$ tirages, les $k-2$ premiers ont apporté une blanche et le $(k-1)$-ième une noire.
Notons B_i (respectivement N_i) l'événement : « le i-ième tirage a lieu et la i-ième boule tirée est blanche (respectivement noire) ».

— *Pour* $k = 2$: $\mathbb{P}(N = 2) = \mathbb{P}(N_1) = \dfrac{1}{2}$.
Comme $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{2}$ on a bien $\mathbb{P}(N = k) = \dfrac{1}{k(k-1)}$.
— *Pour* $k \geq 3$, $\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-2} \cap N_{k-1})$.
En appliquant la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-3}}(B_{k-2}) \times \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(N_{k-1}).$$

Après i tirages ayant amené une blanche, l'urne contient au total $i+2$ boules : une noire et $i+1$ blanches.
On en déduit que $\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_i}(B_{i+1}) = \dfrac{i+1}{i+2}$ et $\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_i}(N_{i+1}) = \dfrac{1}{i+2}$.
D'où

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{k-2}{k-1} \times \frac{1}{k} = \frac{(k-2)!}{k!} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\},\ \mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{k(k-1)}}.$$

b) La variable N admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geq 2} k\mathbb{P}(N = k)$ converge absolument. Ici $k\mathbb{P}(N = k) = \dfrac{1}{k-1} \geq 0$.
La série $\sum\limits_{k\geq 2} k\mathbb{P}(N = k)$ diverge puisque la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.
Conclusion : $\boxed{\text{la variable } N \text{ n'a pas d'espérance.}}$

② a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Montrons que la variable $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Notons F_X la fonction de répartition de X, F_U la fonction de répartition de U.
Comme $0 \leq U < 1$ alors $0 < 1 - U \leq 1$ et par conséquent $\ln(1-U) \leq 0$.
$-\dfrac{1}{\lambda}$ étant strictement négatif, on a donc $X \geq 0$: $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.

— Cas où $x < 0$:
$F_X(x) = 0$ car $X \geq 0$.

— Cas où $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\ln(1-U) \geq -\lambda x\right) \quad \text{car } -\lambda < 0 \\
&= \mathbb{P}\left(1-U \geq e^{-\lambda x}\right) \quad \text{car la fonction exp est croissante sur } \mathbb{R} \\
&= \mathbb{P}\left(U \leq 1-e^{-\lambda x}\right) \\
&= F_U\left(1-e^{-\lambda x}\right)
\end{aligned}$$

Or $x \geq 0$ donc $-\lambda x \leq 0$ et $1-e^{-\lambda x} \in [0,1[$.
U suit la loi uniforme sur $[0,1[$ donc $F_U(t) = t$ pour tout réel t appartenant à $[0,1[$.
Comme $1-e^{-\lambda x} \in [0,1[$, $F_U\left(1-e^{-\lambda x}\right) = 1-e^{-\lambda x}$ et par conséquent $F_X(x) = 1-e^{-\lambda x}$.

Bilan : $F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ, ce qui permet de conclure que

$$\boxed{X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \text{ suit la loi } \mathcal{E}(\lambda)}.$$

b) Fonctions Python :

```python
import random as rd
import math as m

def nombre_boules():
    N = 2
    p = 1/N # proba de tirer la noire
    while rd.random() > p:
        N += 1 # une blanche de plus
        p = 1/N
    return N

def T(lbda):
    """simule la variable T"""
    N = nombre_boules()
    maxi = -m.log(1-rd.random())/lbda # X1(-->loi expo E(lbda))
    for k in range(N-1):
        X = -m.log(1-rd.random())/lbda
        if X > maxi:
            maxi = X
    return maxi # renvoie le maximum de X1,...,XN
```

c) Estimation de l'espérance de T pour $\lambda = 1$:

```
lbda = 1
n = 10000 # nb de simulations de T
c = 0
for k in range(n):
    c += T(lbda)
print(c/n) # estimation de E(T)
```

Le programme affiche 2.0203844676172804 ce qui laisse penser que $\mathbb{E}(T)$ est proche de 2.

③ Soit $x \in [0, 1[$.

a) Si $0 \leq t \leq x$, alors $t \neq 1$ car $x < 1$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique (t^k) dont la raison t est différente de 1 donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1-t}$.

Ainsi on a, pour tout $t \in [0, x]$, $\boxed{\displaystyle\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}}$.

b) En intégrant cette égalité sur$[0, x]$ et par linéarité de l'intégrale, il vient :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^x t^k\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x)$. Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

D'où le résultat :

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

Par changement de variable dans la somme en posant $k = k+1$, on obtient :

$$\boxed{-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t}.$$

c) Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ et $t \mapsto t^{n+1}$ sont croissantes sur $[0, 1[$. On peut donc écrire que

$$\begin{cases} 1 \leq \dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-x} \\ 0 \leq t^{n+1} \leq x^{n+1} \end{cases} \text{pour tout réel } t \in [0, x].$$

En multipliant membre à membre (les réels étant tous positifs), il s'ensuit que

$$0 \leq \frac{t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Par croissance de l'intégrale (avec $x \geq 0$), on en déduit que

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{x^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_0^x \frac{x^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+2}}{1-x}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^{n+2} = 0$ car $x \in [0,1[$.
On en déduit, par encadrement, que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0}.$$

D'après 3.(b) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$, on conclut

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)}.$$

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ pour tout réel $x \in [0,1[$.

d) Étant donné un entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k(k-1)}$ se décompose sous la forme : $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

En multipliant par x^k on a alors : $\dfrac{x^k}{k(k-1)} = \dfrac{x^k}{k-1} - \dfrac{x^k}{k} = x\dfrac{x^{k-1}}{k-1} - \dfrac{x^k}{k}$.

D'après la question précédente, les deux séries $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{x^{k-1}}{k-1}$ convergent (car $x \in [0,1[$).

Donc par combinaison linéaire de séries convergentes, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{x^k}{k(k-1)} \text{ converge}}$.

De plus :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k(k-1)} = x\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k-1} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \quad (*)$$

Par changement de variable : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \frac{x}{1} = -\ln(1-x) - x$.

En substituant dans la relation $(*)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k(k-1)} &= -\,x\ln(1-x) - (-\ln(1-x) - x)\\ &= x + (1-x)\ln(1-x)\end{aligned}$$

Ainsi on a bien

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k(k-1)} = \varphi(x)}$$

où φ est la fonction définie sur $[0,1[$ par $\varphi(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.

④ Soient $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $x \in \mathbb{R}$.

— 1er cas : $x < 0$.
T ne prend que des valeurs positives car $X_i(\Omega) = [0,+\infty[$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et $T = \max(X_1, \ldots, X_N)$.
Dès lors, $\mathbb{P}_{(N=k)}(T \leq x) = 0$ et $\mathbb{P}(T \leq x) = 0$ car $x < 0$.
De même, $F(x) = 0$ car $X_1(\Omega) = [0,+\infty[$ et il est facile de vérifier que $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi(F(x)) = \varphi(0) = 0$.
Donc on a bien $\mathbb{P}(T \leq x) = \varphi(F(x))$ si $x < 0$.

— 2e cas : $x \geq 0$.
Par définition, $T = \max(X_1, \ldots, X_N)$. Sachant $(N = k)$, T est alors égale à $\max(X_1, \ldots, X_k)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(N=k)}(T \leq x) &= \mathbb{P}_{(N=k)}\left(\bigcap_{i=1}^{k}(X_i \leq x)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}_{(N=k)}(X_i \leq x) \quad \text{par indépendance mutuelle des } X_i \\
&= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i \leq x) \quad \text{par indépendance des } X_i \text{ avec } N \\
&= \prod_{i=1}^{k} F(x) \quad \text{car les } X_i \text{ suivent la même loi que } X_1 \\
&= (F(x))^k \\
&= (1-e^{-\lambda x})^k \quad \text{car } X_1 \text{ suit la loi } \mathcal{E}(\lambda)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}_{(N=k)}(T \leq x) = (F(x))^k = (1-e^{-\lambda x})^k}$, pour tout $k \geq 2$.
Comme $N(\Omega) = [\![2,+\infty[\![$, la famille $((N=k))_{k\geq 2}$ est un système complet d'événements.
En appliquant la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leq x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{(N=k)}(T \leq x) \times \mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(F(x))^k}{k(k-1)}
\end{aligned}$$

Comme $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(F(x)^k}{k(k-1)} = \varphi(F(x))$ d'après 3.(d).

En conclusion, pour tout réel x on a : $\boxed{\mathbb{P}(T \leq x) = \varphi(F(x))}$.

⑤ On admet que T est une variable à densité.
Une densité de T s'obtient en dérivant la fonction de répartition F_T de T partout où elle est dérivable.

Pour tout réel x, $F_T(x) = \mathbb{P}(T \leq x) = \varphi(F(x))$.

F est la fonction de répartition de X_1 : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $[0, 1[$.

φ est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.

Pour tout $x \in [0, 1[$, $\varphi(x) = x + (1 - x)\ln(1 - x)$ et $\varphi'(x) = -\ln(1 - x)$.

Par composition F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel x non nul : $F_T'(x) = F'(x)\varphi'(F(x)$.

— Si $x < 0$: $F_T'(x) = 0$.

— Si $x > 0$: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ donc $\ln(1 - F(x)) = -\lambda x$ et $F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
  On obtient ainsi : $F_T'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \times \lambda x = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$.

Conclusion : une densité de T est donnée par la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

⑥ T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x g(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument.

Ici, la fonction $x \mapsto xg(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$.

Il suffit alors d'étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$.

$xg(x) = \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} = \lambda \times \lambda x^2 e^{-\lambda x}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

On reconnaît le moment d'ordre 2 d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ converge : $\mathbb{E}(T)$ existe.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \mathbb{E}(X_1^2) \text{ avec } X_1 \text{ qui suit la loi } \mathcal{E}(\lambda) \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Koenig-Huygens et un résultat de cours sur la loi exponentielle :

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Finalement : $\mathbb{E}(T) = \lambda \times \dfrac{2}{\lambda^2}$ soit :

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{2}{\lambda}}.$$

En particulier pour $\lambda = 1$ on a : $\mathbb{E}(T) = 2$: ce résultat est cohérent avec la conjecture effectuée à la question 2.(c).