SUJETS DE PROBABILITES

Exercice 108 :

① On propose le code suivant, les trois dernières fonctions permettant de conjecturer le comportement dans les cas i, ii et iii.

```
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def NbDiff(L):
    X = []
    for elem in L:
        if elem not in X:
            X.append(elem)
    return len(X)

def Z(N,k):
    X = [rd.randint(1,N) for _ in range(k)]
    return NbDiff(X)

def EZ(N,k,repet=100):
    c = 0
    for _ in range(repet):
        c = c+Z(N,k)
    return c/repet

def estimi(repet=100):
    abs = [k for k in range(200)]
    ord = [EZ(10,k,repet) for k in abs]
    plt.plot(abs,ord)
    plt.show()

def estimii(repet=100):
    abs = [N for N in range(1,200)]
    ord = [EZ(N,10,repet) for N in abs]
    plt.plot(abs,ord)
    plt.show()

def estimiii(repet=100):
    abs = [N for N in range(1,200)]
    ord = [EZ(N,N,repet) for N in abs]
    plt.plot(abs,ord)
    plt.show()
```

Dans les deux premiers cas, l'espérance de Z_k semble tendre vers 10, et elle semble tendre vers $+\infty$ linéairement dans le dernier cas.

② Après un tirage, on a nécessairement tiré un et un seul numéro, et donc $Z_1 = 1$.

L'image de Z_2 est $\{1, 2\}$. La probabilité d'avoir $Z_2 = 1$ est celle de tirer deux fois de suite la même boule, et donc $\mathbb{P}(Z_2 = 1) = \frac{1}{N}$. On en déduit $\mathbb{P}(Z_2 = 2) = \frac{N-1}{N}$.

On a alors
$$\mathbb{E}(Z_1) = 1 \text{et} \mathbb{E}(Z_2) = \frac{1}{N} + 2\frac{N-1}{N} = \frac{2N-1}{N}.$$

③ a) Les tirages étant indépendants, la probabilité d'avoir $Z_k = 1$ est celle de tirer toujours la même boule. On a donc $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \frac{1}{N^{k-1}}$.

La probabilité d'avoir $Z_k = k$ est celle de ne tirer que des boules différentes, et donc
$$\mathbb{P}(Z_k = k) = \begin{cases} \frac{N!}{(N-k)!N^k} & \text{si } k \leqslant N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Les $[Z_k = i]$ forment un système complet d'événements, et donc par la formule des probabilités totales, on a
$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = \ell) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = \ell)\mathbb{P}(Z_k = i).$$

Or on ne peut, à chaque tirage, qu'augmenter Z_k de 0 ou 1, et donc
$$\forall i \notin \{\ell, \ell-1\},\ \mathbb{P}_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = \ell) = 0.$$

On a ensuite $\mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{N}$, ce cas correspondant au tirage d'une boule déjà vue au $(k+1)$-ième tirage, et $\mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{N-\ell+1}{N}$, ce cas correspondant au tirage d'une nouvelle boule au $(k+1)$-ième tirage.

On retrouve alors l'égalité proposée.

c) On peut réécrire l'égalité précédente sous la forme
$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{1}{N}\left(\ell\mathbb{P}(Z_k = \ell) - (\ell-1)\mathbb{P}(Z_k = \ell-1) + N\mathbb{P}(Z_k = \ell-1)\right)$$

On a alors, en notant que
$$N\ell - \ell(\ell-1) = (\ell-1)(N-1) + N - (\ell-1)^2$$
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{k+1}) &= \sum_{\ell=1}^{N} \ell\mathbb{P}(Z_{k+1} = \ell) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N}\big(\ell^2\mathbb{P}(Z_k = \ell) - \ell(\ell-1)\mathbb{P}(Z_k = \ell-1) + N\ell\mathbb{P}(Z_k = \ell-1)\big) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N}\ell^2\mathbb{P}(Z_k = \ell) - (\ell-1)^2\mathbb{P}(Z_k = \ell-1) + ((\ell-1)(N-1)+N)\mathbb{P}(Z_k = \ell-1) \\
&= \frac{1}{N}(N^2\mathbb{P}(Z_k = N) - 0^2\mathbb{P}(Z_k = 0)) \\
&+ \frac{N-1}{N}\left(\sum_{\ell=1}^{N}(\ell-1)\mathbb{P}(Z_k = \ell-1)\right) + \sum_{\ell=1}^{N}\mathbb{P}(Z_k = \ell-1) \qquad \text{par télescopage} \\
&= N\mathbb{P}(Z_k = N) + \frac{N-1}{N}\left(\sum_{\ell=0}^{N-1}\ell\mathbb{P}(Z_k = \ell)\right) + \sum_{\ell=0}^{N-1}\mathbb{P}(Z_k = \ell) \\
&= N\mathbb{P}(Z_k = N) + \frac{N-1}{N}\left(\mathbb{E}(Z_k) - N\mathbb{P}(Z_k = N)\right) + 1 - \mathbb{P}(Z_k = N) \\
&= \mathbb{P}(Z_k = N)\left(N - (N-1) - 1\right) + \frac{N-1}{N}\mathbb{E}(Z_k) + 1 = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}(Z_k) + 1
\end{aligned}$$

④ C'est une application directe du cours sur les suites arithmético-géométrique en notant que $\mathbb{E}(Z_1) = 1$.

⑤ a) Dans ce cas, comme $\left|\frac{N-1}{N}\right| < 1$, on a $\mathbb{E}(Z_k) \underset{k\to\infty}{\sim} N$.

b) Dans ce cas, on a $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^k = 1 - \frac{k}{N} + \circ(\frac{1}{N})$, et donc

$$\mathbb{E}(Z_k) \underset{N\to\infty}{\sim} k.$$

c) Dans ce dernier cas, on a, en notant que $\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k = e^{k\ln(1-\frac{1}{k})} \to e^{-1}$,

$$\mathbb{E}(Z_k) \sim k(1 - e^{-1}).$$

Dans les deux premiers cas, on retrouve bien les résultats de la question 1c.
Pour le troisième cas, on trouve bien une droite avec un coefficient directeur d'environ $0,63 \approx 1 - e^{-1}$.