17 T.D. Fonctions de plusieurs variables.

- Fonction de deux variables continue, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un pavé ouvert du plan. ✐ « aucune question sur la notion de continuité ne doit être posée ».
- Surface représentative d'une fonction de deux variables, courbes ou lignes de niveau.
- Utilisation des dérivées partielles premières pour évaluer une petite variation de la valeur d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ découlant de petites variations sur les variables.
- Dérivation d'une expression de la forme $f(x(t), y(t))$; Définition du gradient.
- Dérivées partielles d'ordre 2. Interversion des dérivations (théorème de Schwarz admis).
- Pour une fonction définie sur un pavé ouvert du plan, et admettant des dérivées partielles : les dérives partielles en un extremum s'annulent.

Exercice 1 : Calculer là où c'est possible les dérivées partielles des fonctions suivantes

① f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-xy}$

② g définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par $g(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

③ φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ dont on demande les dérivées partielles par rapport à μ et σ, exprimées en fonction de φ.

Exercice 2 : Gradient et variations de f

Soit f définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $f(x,y,z) = 1 + x^2 + 2y^3 - 3xz + yz - z^4$.

① Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Calculer ses dérivées premières et secondes.

② Que vaut le gradient de f au point $A = (1,1,1)$?

③ Approcher les variations de f entre les points A et $(1.01, 1.02, 0.99)$.

Exercice 3 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = x^2y + \dfrac{x}{y^2}$.

On considère les fonctions u et v définies pour tout t réel par : $u(t) = t^2$ et $v(t) = t$.
Calculer de deux manières différentes la dérivée de g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = f(u(t), v(t))$

Exercice 4 : (d'après AgroB 2022)

On définit pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $V(x,y) = x - a\ln(x) + y - \ln(y)$ et on considère $(x(.), y(.))$ une solution du système différentiel $\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} &= x - xy \\ \dfrac{dy}{ds} &= -ay + xy \end{cases}$ avec les conditions initiales $x(0) = x_0 > 0$ et $y(0) = y_0 > 0$.
Montrer que $V(x(s), y(s))$ reste constante pour tout $s \geq 0$.

Exercice 5 :

On considère la fonction V définie pour tout x et y réels positifs par : $V(x,y) = \ln(xy) - (x+y)$

① Montrer que V ne peut posséder un extremum qu'un un seul point qu'on déterminera.

② Montrer que V admet un maximum strict au point trouvé.

Exercice 6 :

Dire dans chaque cas s'il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$1) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 2x \end{cases} \quad ; \; 2) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = x^2 + y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = x - y^2 \end{cases}$$