SUJET 9 -

Exercice :

Préliminaire : Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $\forall q \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.

En déduire, pour tout n entier naturel non nul, une expression des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k \,;\, S_2 = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \,;\, S_3 = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)k-2)$$

Dans la suite de l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égale à 2.
On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n dans laquelle on tire simultanément deux jetons au hasard.
On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros tirés et Y la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros tirés.

Partie I : Approche informatique.

① Écrire une fonction Python `simulXY(n)` qui retourne, pour un entier n fourni en variable d'entrée, une réalisation des variables aléatoires X et Y au cours de l'expérience ci-dessus.

② En répétant m fois (avec $m = 1000$) l'appel à la fonction précédente, estimez l'espérance de X et de Y, ainsi que la variance de X

Partie II : Approche probabiliste.

① Soit $j \in [\![2,n]\!]$. Montrer que : $\mathbb{P}(Y \leq j) = \dfrac{\binom{j}{2}}{\binom{n}{2}}$.

En déduire $\mathbb{P}(Y = j)$. Vérifier que la formule donnant $\mathbb{P}(Y = j)$ est encore valable pour $j = 1$.

② Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(X \geq i)$ et $\mathbb{P}(X = i)$. Vérifier que la formule donnant $\mathbb{P}(X = i)$ est encore valable pour $i = n$.

③ Déterminer la loi du couples (X,Y) et retrouver les résultats de II.1. et II.2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

④ a) Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$ et de $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $\mathbb{V}(Y)$.

b) Exprimer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de n. Vérifier votre réponse à l'aide de votre modélisation informatique.

c) Déterminer $\mathbb{E}(Y(Y-2))$ puis exprimer $\mathbb{E}(Y^2)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ en fonction de n. La aussi, validez votre réponse grâce à Python.