SUJET 9

Préliminaire

Montrer que $\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1} \quad \forall n \geq q$

méthode 1 : Par récurrence...

(i) Pour $n=q$, on a $\sum_{k=q}^{q} \binom{q}{q} = 1 = \binom{q+1}{q+1}$

(ii) On suppose $\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$ pour n fixé $(n \geq q)$.

(iii) Alors $\sum_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} = \sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} + \binom{n+1}{q} = \binom{n+1}{q+1} + \binom{n+1}{q} = \binom{n+2}{q+1}$ d'après la F. de Pascal.

(iv) $\boxed{\text{Conclusion}}$ $\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1} \; \forall n \geq q$.

Méthode 2 : $\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{q}{q} + \sum_{k=q+1}^{n} \left[\binom{k+1}{q+1} - \binom{k}{q+1}\right]$ [F. de Pascal]

$= 1 + \binom{n+1}{q+1} - \binom{q+1}{q+1}$ Par télescopage...

$= 1 + \binom{n+1}{q+1} - 1 = \binom{n+1}{q+1}$ □

Conséquences a) $q=1$ $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $q=2$: $\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \binom{n+1}{3} \Rightarrow \sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$

c) $q=3$: $\sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3} = \frac{1}{6} \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) = \binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)!}{(n-3)!\,4!}$

Soit $\sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) = \frac{(n^2-1)n.(n-2)}{4}$

I/ Approche informatique

① on écrira par exemple

```
def tirerXY(n):
    Urne = [k for k in range(1,n+1)]
    T = rdm.sample(Urne, 2)
    if T[0] < T[1]:
        return T[0], T[1]
    else:
        return T[1], T[0]
```

② On utilise la loi faible des grands nombres et on calcule la moyenne empirique et la variance empirique.

```
def estimEspEtVar(n, m=1000):
    L = [simXY(n) for _ in range(m)]
    Sx, Sy, Sx2, Sy2 = 0, 0, 0, 0
    for k in range(m):
        Sx += L[k][0] ; Sx2 += L[k][0]**2
        Sy += L[k][1] ; Sy2 += L[k][1]**2
    return Sx/m, Sy/m, Sx2/m -(Sx/m)**2, Sy2/m-(Sy/m)**2
```

II/ Approche probabiliste

① $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{n}{2}$ (tirage par poignée...)

$(Y \leq j)$ est réalisé si et seulement si on a tiré une poignée de 2 jetons parmi ceux numérotés de 1 à j

d'où $\boxed{P(Y \leq j) = \dfrac{\binom{j}{2}}{\binom{n}{2}}}$ (et ce pour tout $j \in [\![2,n]\!]$) [on utilise l'équiprobabilité]

Ensuite, on commence par dire que :

- $P(Y=2) = P(Y \leq 2) = \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{n}{2}} = \dfrac{1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2}{n(n-1)}$
- $\forall j \in [\![3,n]\!],\ P(Y=j) = P(Y \leq j) - P(Y \leq j-1)$

$$= \frac{1}{\binom{n}{2}}\left[\binom{j}{2} - \binom{j-1}{2}\right] = \frac{1}{\binom{n}{2}}\binom{j-1}{1}$$

F. de Pascal...

Conclusion $\boxed{\forall j \in [\![2,n]\!],\ P(Y=j) = \dfrac{j-1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}}$

② $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$ (le plus petit jeton ne peut pas porter le numéro n ...)

$(X \geq i)$ est réalisé ssi les 2 jetons ont été tirés parmi les $n-i+1$ qui portent des numéros supérieurs ou égaux à i

D'où $\quad P(X \geq i) = \dfrac{\binom{n-i+1}{2}}{\binom{n}{2}} = \dfrac{(n-i+1)(n-i)}{n(n-1)}$

Dès lors :

- $P(X = n-1) = P(X \geq n-1) = \dfrac{2}{n(n-1)}$
- $\forall i \in [\![1, n-2]\!],\ P(X = i) = P(X \geq i) - P(X \geq i+1)$

$$= \frac{1}{\binom{n}{2}} \left[\binom{n-i+1}{2} - \binom{n-i}{2} \right] = \frac{\binom{n-i}{1}}{\binom{n}{2}}$$

F. de Pascal.

Conclusion $\boxed{\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ P(X = i) = \dfrac{2(n-i)}{n(n-1)}}$

Remarque : Si $i = n$, $P(X = n) = 0 = \dfrac{2(n-n)}{n(n-1)}$
$\to$ la formule reste vraie.

(3) Loi du couple (X, Y) :

- $(X, Y)(\Omega) = \{ (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \mid i < j \}$.
- $P(X = i, Y = j) = \dfrac{1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2}{n(n-1)}$ [car 1 seul cas favorable]

On nous demande alors de retrouver les lois marginales.

$$\begin{cases} X(\Omega) = [\![1, n-1]\!] \\ \forall i \in X(\Omega),\ P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} p_{ij} = \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(\Omega) = [\![2, n]\!] \\ \forall j \in Y(\Omega),\ P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} p_{ij} = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \end{cases}$$

On a bien retrouvé les lois obtenues dans les questions II/(1) et II/(2).

(4) a) On note que $(n+1-X)(\Omega) = [\![n+1-(n-1) ; n+1-1]\!]$
$= [\![2, n]\!] = Y(\Omega)$

Par ailleurs, $\mathbb{P}(n+1-X=j) = \mathbb{P}(X = n+1-j)$

$$= \frac{2(n-(n+1-j))}{n(n-1)} = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} = \mathbb{P}(Y=j)$$

Conclusion : $\boxed{n+1-X \text{ et } Y \text{ ont même loi}}$

b) On commence par $\mathbb{E}(Y)$:

D'après Préliminaire

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=2}^{n} j.\mathbb{P}(Y=j) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^{n} j(j-1) = \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Conclusion $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3}(n+1)}$

Par ailleurs, par linéarité de $\mathbb{E}$:

$$\mathbb{E}(n+1-X) = n+1 - \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3}(n+1)$$

conclusion $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}(n+1)}$

c) D'après le théor. de transfert :

$$\mathbb{E}(Y(Y-2)) = \sum_{j=2}^{n} j(j-2)\mathbb{P}(Y=j) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^{n} j(j-2)(j-1)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{4} \quad \text{[cf. Préliminaire]}$$

$$= \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

D'où $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}[Y(Y-2)] + 2\mathbb{E}(Y)$ [linéarité de $\mathbb{E}$]

$$= \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \frac{4}{3}(n+1) = \boxed{(n+1)\frac{3n+2}{6}}$$

Donc, d'après K.H. :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y) = (n+1)\frac{3n+2}{6} - \left[\frac{2}{3}(n+1)\right]^2$$

$$= (n+1)\left[\frac{3n+2}{6} - \frac{4}{9}(n+1)\right]$$

Soit $\boxed{\mathbb{V}(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}}$

Enfin $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(n+1-X) = (-1)^2\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X)}$