14 Couples de v.a.r. discrètes.

- Loi conjointe d'un couple (X, Y) de deux variables aléatoires discrètes positives.
- Lois marginales, lois conditionnelles. Indépendance
- Théorème de transfert.
- Lois de $u(X, Y)$. Plus particulièrement loi de $max(X, Y)$, $min(X, Y)$ et $X + Y$.

Exercice 1 : ✶

On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $E = [\![1, n+1]\!]$. La loi du couple est donnée par :

$$\forall (i,j) \in E^2, \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \lambda \cdot \binom{n}{i-1} \cdot \binom{n}{j-1}$$

① Déterminer λ.

② Déterminer la loi marginale de X. Calculer son espérance et sa variance ;

③ On considère la matrice M définie par $\forall (i,j) \in E^2$, $M_{i,j} = \mathbb{P}_{(Y=j)}(X = i)$.
M est-elle inversible ? Calculer M^2.

Exercice 2 : ✶

Soit X, variable aléatoire égale au résultat d'un tirage au hasard d'un entier sur $[\![1, n]\!]$. On effectue alors un tirage au hasard dans l'intervalle $[\![1, X]\!]$ dont le résultat se note Y. Déterminer les espérances de X et de Y.

Exercice 3 : ✶

Soit $X_1, \cdots, X_n$ une famille de n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent une même loi de Bernoulli de paramètre p. Montrer par récurrence que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 4 : ✶✶

Un poissonnier romain vient concurrencer Ordralfabétix dont la fraîcheur des produits est mise en doute. Les premiers jours, les villageois choisissent au hasard leur magasin. On suppose que que le nombre de clients qui chaque jour entre dans l'une ou l'autre des deux boutiques suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On appelle X le nombre de personnes allant chez Ordralfabétix et Y le nombre de ceux qui vont en face.

① Déterminer la loi de X et de Y.

② Énervé, Ordralfabétix distribue au hasard les bourre-pif à raison d'un client sur trois. Soit G et P, variables aléatoires respectivement égales au nombre de client qui reçoivent un coup et les autres. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

③ Les villageois, quant à eux, sont partagés. Certains parient qu'un nombre pair de coups sera distribué tandis que les autres parient qu'il sera impair. L'un des deux groupes a-t-il plus de chance de gagner ?

④ Les variables aléatoires X et G sont-elle indépendantes ? Si non, déterminer $\mathrm{Cov}(G, X)$.

Exercice 5 : ✶✶

Chaque crocodile qui traverse la clairière séparant le marengo du fleuve à une probabilité p de périr écrasé par un éléphant qui saute en parachute. On posera $q = 1 - p$.
Un matin, n crocodiles quittent le marengo pour rejoindre le fleuve. On note X le nombre de victimes des éléphants parmi les crocodiles.
Les survivants reviennent le soir par le même chemin. On note Y le nombre de victimes des éléphants parmi ces survivants du premier voyage. On note $Z = X + Y$ le nombre total de victimes.

① Déterminer la loi de X.

② Calculer la probabilité d'avoir h victimes au deuxième voyage sachant qu'il y en a k au premier pour des valeurs de h qu'on précisera.

③ Montrer que $\mathbb{P}(Z = s, X = k) = \binom{n}{s}\binom{s}{k} p^s q^{2n-s-k}$ pour des valeurs de s et de k qu'on déterminera.

④ Quelle est la loi de Z ? Donner deux méthodes distinctes pour obtenir ce résultat.

Exercice 6 : ✶✶ D'après Oral Agro 2022

Soit n un entier naturel non-nul. On dispose de n jetons et de trois urnes numérotées de 1 à 3.
Pour chaque jeton, on choisit une des trois urnes au hasard et avec équiprobablité et on place le jeton dans l'urne choisie. Le placement de chaque jeton est indépendant du placement de tous les autres jetons.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons contenus dans l'urne 1 à la fin de l'expérience, et on note Y le nombre d'urnes restées vides à la fin de l'expérience.

① Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel n non nul, simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus, et renvoie les valeurs de X et de Y obtenues.

② Dans cette question, $n = 10$. Utiliser la fonction précédente pour simuler un grande nombre de fois l'expérience et obtenir une valeur approchée de $\mathbb{E}(XY), \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Que peut-on conjecturer sur la valeur de la covariance du couple (X, Y) ?

③ Dans cette question, $n = 2$.

- **a.** Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, puis donner la loi conjointe du couple (X, Y) sous forme de tableau.
- **b.** Donner la loi de X, puis celle de Y.
- **c.** Calculer la covariance du couple (X, Y).

④ Dans cette question, on revient au cas général où n est un entier naturel quelconque.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne numéro i est vide à la fin de l'expérience, et qui vaut 0 sinon.

- **a.** Déterminer la loi de X, et donner la valeur de son espérance.
- **b.** En remarquant que $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$, calculer $\mathbb{E}(Y)$
- **c.** Démontrer que :

$$\forall i \in \{2, 3\}, \forall j \in [\![0, n]\!], P\left(X = j \cap Y_i = 1\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right) \times \frac{1}{3^n}$$

- **d.** Calculer alors $\mathbb{E}\left(XY_i\right)$ pour $i \in \{2, 3\}$. Que vaut cette espérance si $i = 1$?
- **e.** Calculer la covariance du couple (X, Y).

Exercice 7 : ✶✶✶ D'après Oral Agro 2013

On effectue une succession de tirages avec remise dans deux urnes contenant chacune une proportion p de boules blanches jusqu'à obtenir, pour chacune, une première boule blanche.
Soit X et Y le nombre de tirages ayant amené une autre couleur que la couleur blanche, respectivement sur la première et la seconde urne.

① **a.** Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X + Y \leq 0)$ et $\mathbb{P}(X - Y \leq 0)$.
- **b.** Les événements $(X + Y \leq 0)$ et $(X - Y \leq 0)$ sont-ils indépendants ?
- **c.** Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(Y < X)$ et $\mathbb{P}(X = Y)$.

② Expliciter la loi de la variable aléatoire $D = X - Y$ et déterminer, si elles existent, son espérance et sa variance.

③ On pose $T = max(X, Y)$ et $U = min(X, Y)$.

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X \geq k)$ et en déduire que U soit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
b. En déduire l'espérance et la variance de U ainsi que l'espérance de T.
c. Montrer que $(T = k) \cup (U = k) = (X = k) \cup (Y = k)$. En déduire que $\mathbb{P}(T = k) = 2\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(U = k)$.
d. On se place dans le cas où $p = 1/2 = q$. Démontrer l'existence et donner la valeur de $\mathbb{V}(T)$.

Exercice 8 : ✶✶ D'après Oral Agro 2022

Soient $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω, indépendantes et qui suivent la même loi géométrique de paramètre p.
On définit la matrice aléatoire :

$$M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

On note S la plus grande valeur propre de M et D la plus petite. On définit ainsi deux variables S et D sur l'univers Ω.

① Déterminer la probabilité que la matrice M soit inversible. Exprimer le résultat en fonction de p uniquement.

② **a.** Soit A est une matrice carrée d'ordre 2 définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux réels. Déterminer en fonction de a et de b les valeurs propres de A.
b. Exprimer S et D en fonction de X et de Y et en déduire l'espérance et la variance de S et de D.
c. Écrire une fonction `S_D()` qui retourne une réalisation de la variable S et une réalisation de la variable D.

③ Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.

④ Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

⑤ Établir que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$P(S = n) = (n - 1)p^2 q^{n-2}$$

⑥ Si $p = 0.2$, quelle est la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices M ?