

## SUJET 6

**Exercice :**

Deux amis Anna et Benoît jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel  $X$ .

Si cet entier  $X$  est impair, Anna donne  $X$  euros à Benoît, on considère que Benoît a gagné.

Si  $X$  est nul, on considère que la manche est nulle.

Si  $X$  est pair non nul, Benoît donne  $X$  euros à Anna et on considère que Anna a gagné.

On pose  $G$  le gain algébrique de Anna.

On suppose que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $a$  ( $a > 0$ ).

On note enfin :

- $A$  l'événement : « Anna gagne » et  $p = \mathbb{P}(A)$ .
- $B$  l'événement : « Benoît gagne » et  $q = \mathbb{P}(B)$ .
- $C$  l'événement : « La manche est nulle » et  $r = \mathbb{P}(C)$ .

- ① Écrire un programme Python permettant de simuler la variable aléatoire  $G$ .  
*✎ On rappelle que `np.random.poisson(a)` permet de simuler une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $a$  mais on privilégiera une modélisation à l'aide de la seule fonction `rdm.random()`*
- ② a) Déterminer  $r$  et exprimer  $p$  et  $q$  sous forme d'une somme.  
b) Exprimer  $p + q$  et  $p - q$  en fonction de  $a$ .  
c) En déduire les valeurs de  $r$ ,  $p$  et  $q$  en fonction de  $a$ .
- ③ Compléter le programme de la question 1. pour qu'il permette de donner une estimation de la valeur de l'espérance du gain de Anna d'une part et de la probabilité pour Anna de gagner, d'autre part.
- ④ D'après les simulations effectuées, d'après vous, à qui le jeu donne-t-il l'avantage? *On pourra tester les valeurs de gain et de la probabilité qu'Anna gagne pour  $a = 2$ .*
- ⑤ a) Exprimer  $G$  en fonction de  $X$ .  
b) Calculer l'espérance du gain  $G$  de Anna.
- ⑥ On suppose désormais que  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $\alpha$ . On garde les mêmes notations que précédemment.  
a) Déterminer  $p$ ,  $q$ ,  $r$ .  
b) Calculer l'espérance  $\mathbb{E}(G)$  de  $G$  après avoir justifié son existence.  
c) Comment interpréter le signe de  $\mathbb{E}(G)$ ?