

SUJET 6**Exercice :**

a et b désignent des entiers naturels. Le taux de change est de 1,2 dollar = 1 euro.

Règle du jeu : Marc et Bill jouent à pile ou face.

A chaque lancer Marc lance 3 pièces de 1 euro et Bill 2 pièces de 1 dollar. Ils lancent simultanément les cinq pièces. On note X le nombre de « face » des pièces européennes et Y le nombre de « face » des pièces américaines.

A chaque lancer Marc met en jeu une (nouvelle) mise de a euros et Bill une (nouvelle) mise de b dollars.

Si $(X > Y)$ est réalisé, Marc gagne la partie, qui se termine, et encaisse la totalité des mises ; si $(X < Y)$ est réalisé, Bill gagne la partie, qui se termine, et encaisse la totalité des mises ; si $(X = Y)$ ils lancent à nouveau les pièces (non sans avoir rajouté a euros pour Marc, b dollars pour Bill).

- ① *Quelques calculs préliminaires :* Pour quelles valeurs de x réel la série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge ? Préciser sa

somme sur ce domaine ainsi que la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.

- ② Sur un lancer :

- a) Donner la loi de probabilités pour chacune des variables aléatoires X , Y et $Z = X - Y$.
- b) Calculer l'espérance des variables aléatoires X , Y et Z .
- c) Calculer les probabilités des événements : $(X > Y)$, $(X = Y)$ et $(X < Y)$.
- d) Écrire une fonction `simulLancer()` qui retourne la valeur de X et de Y à l'issue d'un lancer.

- ③ Sur une partie.

- a) Écrire une fonction `simulPartie(a,b)` qui prend en paramètre d'entrée la mise de Marc et de Bill et retourne 1 si Marc gagne, 2 si Bill gagne ainsi que le gain de Marc et celui de Bill.
- b) Calculer la probabilité que l'égalité soit réalisée jusqu'au n -ième lancer.
- c) Pour chaque joueur, probabilité de gagner la partie au $n + 1$ -ième lancer ($n \in \mathbb{N}^*$).
- d) Pour chaque joueur, calculer la probabilité de gagner la partie.

- e) Écrire une fonction Python permettant de valider votre réponse.