SUJET 6

Corrigé :

1. a) La variable X a pour image $\mathbb{N}$, et donc la variable Y a pour image $\mathbb{N}^*$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=n) &= \mathbb{P}(X+1=n)\\ &= \mathbb{P}(X=n-1)\\ &= \frac{1}{2^n}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

b) Y admet donc une espérance, qui vaut 2, et par linéarité de l'espérance, X admet une espérance, et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) - 1 = 1$.

De même, X admet une variance, et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = 2$.

c) On simule une loi géométrique à laquelle on soustrait 1.

```python
import random as rd

def simulX():
    bern = 0
    c = 0
    while bern == 0:
        c = c+1
        if rd.random() < 1/2:
            bern = 1
    return c-1
```

d) Soit $s \in [0,1]$. La variable s^X admet une espérance si et seulement si la série $\sum s^k \mathbb{P}(X = k)$ converge absolument. Or $\frac{s}{2} \in [0,1[$, et donc la série géométrique $\sum \left(\frac{s}{2}\right)^k$ converge absolument, et donc s^X admet une espérance, et

$$\mathbb{E}\left(s^X\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{s}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{s}{2}} = \frac{1}{2-s}.$$

2. a) On propose le code

```python
def simulZ(n):
    Z = [1]
    for i in range(n):
        portee = 0
        for _ in range(Z[-1]):
            portee = portee + simulX()
        Z.aprobend(portee)
    return Z
```

On conjecture alors que la population finit toujours par s'éteindre.

b) S'il n'y a pas d'individus à la $n^{\text{ième}}$ génération, alors il n'y en a pas non plus à la suivante, et donc pour tout n
$$[Z_n = 0] \subseteq [Z_{n+1} = 0].$$
Par croissance de la probabilité, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \geqslant u_n$, et la suite (u_n) est donc croissante.
Comme elle est majorée par 1, elle converge.

c) On a
$$\begin{aligned} u_1 &= \mathbb{P}(Z_1 = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_{1,1} = 0) \\ &= \mathbb{P}(X = 0) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$
Comme $u_0 = 0$, on retrouve bien $u_1 = f(u_0)$.

d) Sachant qu'il y a k individus à la première génération, il faut et il suffit que chacun de ces individus n'ait aucun descendant pour avoir $Z_2 = 0$. Par indépendance, on a alors
$$\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) = \prod_{k=1}^{k} \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2^k}.$$
La famille $\{[Z_1 = k] \mid k \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, et par la formule des probabilités totales, on a alors en notant que $\mathbb{P}(Z_1 = k) = \mathbb{P}(X = k)$:
$$\begin{aligned} u_2 &= \mathbb{P}(Z_2 = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0)\mathbb{P}(Z_1 = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\mathbb{P}(X = k) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^X\right) \\ &= f(u_1) \end{aligned}$$

e) La famille $\{[Z_1 = k] \mid k \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, et par la formule des probabilités totales, on a alors
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0)\mathbb{P}(Z_1 = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_n^k \mathbb{P}(X = k) \quad \text{par indépendance des lignées} \\ &= \mathbb{E}\left(u_n^X\right) \quad \text{par théorème de transfert} \\ &= f(u_n) \end{aligned}$$

f) La suite (u_n) étant convergente et la fonction f continue, on a donc $\ell = f(\ell)$, et donc $\ell = 1$.