SUJET 6

Exercice :

① Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

a) Montrer que la variable aléatoire $Y = X + 1$ suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

b) En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser leur valeur.

c) Écrire une programme Python renvoyant une simulation de la variable aléatoire X.

d) Montrer que pour tout réel s de $[0, 1]$, la variable aléatoire s^X admet une espérance, et montrer que :

$$\mathbb{E}\left(s^X\right) = \frac{1}{2 - s}.$$

On notera dans la suite f la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall s \in [0, 1],\ f(s) = \frac{1}{2 - s}.$$

② On considère une population qui évolue de génération en génération.
On part de $Z_0 = 1$ individu, et on note pour tout $n \geqslant 1$, Z_n le nombre d'individus à la $n^{\text{ième}}$ génération, en supposant que, après avoir donné naissance, les individus de la $(n-1)^{\text{ième}}$ génération meurent.
À chaque génération $n \in \mathbb{N}$, on suppose que chaque individu i engendre une portée d'individus de la génération suivante, de taille $X_{n+1,i}$, suivant la même loi que X, et indépendamment du nombre de descendants des autres individus existants ou ayant existé auparavant.

a) Écrire une fonction Python qui, prenant un entier n en entrée, simule l'expérience, et renvoie la liste $[Z_0, Z_1, \ldots, Z_n]$ des nombres de descendants de la population jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ génération.
Conjecturer le comportement de la population au cours d'un grand nombre de générations.

b) On note pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ la probabilité que la population soit éteinte à la génération n. Justifier que la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ.

c) Préciser la valeur de u_1 et vérifier que $u_1 = f(u_0)$.

d) Calculer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0)$.
En déduire que $u_2 = f(u_1)$.

e) Démontrer plus généralement que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

f) En déduire la valeur de ℓ.