Sujet 5 (oral agro-véto 2015)

① a) C'est une question de cours : $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$

Sachant que $(N=n)$ est réalisé, S dénombre des succès "obtenir pile" au cours de n épreuves indépendantes.

D'où, sachant $(N=n)$ on a : $\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$

b) $N(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $S(\Omega)=\mathbb{N}$

Alors

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall k\in\mathbb{N}, \text{ on a : } P(N=n, S=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k>n \\ P_{(N=n)}(S=k)\cdot \underbrace{P(N=n)}_{pq^{n-1}} & \text{si } 0\leq k\leq n \end{cases}$$

<u>Conclusion</u>

$$\boxed{P(N=n, S=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k>n \\ \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\cdot pq^{n-1} = \binom{n}{k} p^{k+1} q^{2n-k-1} & \text{si } 0\leq k\leq n \end{cases}}$$

② a)

```python
def S(p:float) -> int:
    n = 1
    while rdm.random() > p:
        n += 1
    s = 0
    for k in range(n):
        if rdm.random() < p:
            s += 1
    return s
```

loi géométrique

loi binomiale conditionnée par $(N=n)$

b)

```python
def espS(p, m=1000):
    return sum([S(p) for k in range(m)])/m
```

c)

```python
def trace_espS():
    Xp = np.linspace(0.1, 0.9, 50)
    L_esp = [espS(p) for p in Xp]
    plt.plot(Xp, L_esp, 'r')
    plt.ylim(0, 2)
    plt.show()
```

En exécutant cette fonction, il semble que $E(S)$ existe et soit égale à 1, et ce quelle que soit la valeur de p...

3 a) La loi marginale de S est donnée par :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(S=k)=\sum_{n=1}^{\infty}P(N=n,S=k)$$

D'où

$$P(S=0)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{P(N=n,S=0)}_{\neq 0 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^*}$$

Et donc

$$P(S=0)=\sum_{n=1}^{\infty}p\,q^{2n-1}=\frac{p}{q}\sum_{n=1}^{\infty}(q^2)^n$$ [somme d'une série géom. cvgte car $0<q^2<1$ ...)

$$=\frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-q^2}-1\right)=\frac{p}{q}\,\frac{q^2}{\underbrace{1-q^2}_{=(1-q)(1+q)=p(1+q)}}$$

Conclusion $\boxed{P(S=0)=\dfrac{q}{1+q}}$

3 b) On admet que $\forall x\in\,]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^n=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

Toujours d'après la loi conjointe, $\forall k\in\mathbb{N}^*$

$$P(S=k)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{P(N=n,S=k)}_{=0 \text{ si } n<k}=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^{k+1}q^{2n-k-1}$$

$\ell=n-k \Leftrightarrow n=\ell+k$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\binom{\ell+k}{k}p^{k+1}q^{2\ell+k-1}$$

$$=p^{k+1}q^{k-1}\sum_{\ell=0}^{\infty}\binom{\ell+k}{k}(q^2)^{\ell}=p^{k+1}q^{k-1}\frac{1}{(\underbrace{1-q^2}_{p(1+q)})^{k+1}}$$

$$=\frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$$

Conclusion $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(S=k)=\dfrac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}}$

c) $E(S)$ existe si $\displaystyle\sum_{k\geq 0}|kP(S=k)|=\sum_{k\geq 0}kP(S=k)$ converge.
Donc on étudie :

$$\sum_{k\geq 1}k\frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$$ qui est de m̂ nature que $\displaystyle\sum_{k\geq 1}k\left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1}$

qui converge car $0<\dfrac{1-p}{2-p}<1 \Leftrightarrow 0<1-p<2-p$
$\Leftrightarrow 0<p<1<2$

D'où $\boxed{E(S) \text{ existe}}$ et

$$\boxed{E(S)}=0\cdot P(S=0)+\frac{1}{(2-p)^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1}=\frac{1}{(2-p)^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1-p}{2-p}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{(2-p)^2}\cdot\frac{(2-p)^2}{(2-p-1+p)^2}=\boxed{1}$$ ↳ Confirme la conjecture faite en 2 c).

4 a) l'écriture de ces fonctions dépend largement du recours autorisé ou non à la bibliothèque 'numpy'. On fera apparaître la connaissance des formules de statistiques

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

```
def vars(p: float, m=10000) -> float:
    return np.sum([S(p)**2 for k in range(m)])/m
        - esp S(p) ** 2.
```

```
def trace_vars():
    X_p = np.linspace(0.1, 0.99, 50)
    L_vars = [vars(p) for p in X_p]
    plt.plot(X_p, L_vars, 'r')
    plt.show()
```

On peut conjecturer que la variance décroît lorsque p augmente et tend vers 0 quand p tend vers 1 ; ce qui est cohérent car alors la pièce amène face de façon certaine et donc $S \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$ avec $P(S=1) \simeq 1$ ...

b) $E(S(S-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P(S=k)$ [on nous demande le "calcul" ... on admet qu'elle existe ?]

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$$

$$= \frac{1-p}{(2-p)^3}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-2} = \frac{1-p}{(2-p)^3}\ \frac{2}{\left(1-\frac{1-p}{2-p}\right)^3}$$

$$= \frac{1-p}{(2-p)^3}\cdot\frac{2.(2-p)^3}{1^3} = 2(1-p)$$

c) D'après la formule de Koënig. Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E^2(X)$$
$$= 2(1-p) + 1 - 1$$
$$= 2(1-p)$$

le tracé de $p \mapsto 2(1-p)$ confirme la validité de ce calcul et la conjecture faite en 4 a).