SUJET 5

Exercice :

Un forain propose un jeu utilisant une pièce donnant Pile avec la probabilité p ($p \in]0,1[$) et Face avec la probabilité $1-p$. Ce jeu se déroule en deux étapes :

— On lance la pièce jusqu'à obtenir Pile pour la première fois et on garde en mémoire le nombre de lancers qu'il a fallu pour obtenir ce Pile. On notera N ce nombre.

— On lance à nouveau la pièce N fois et on reçoit un cadeau à chaque fois qu'on obtient un nouveau Pile.

On notera N la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier Pile dans la première phase de jeu et S la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de Pile obtenus lors de la deuxième phase de jeu (S ne compte pas le Pile obtenu lors de la première phase de jeu).

① a) Reconnaître la loi de N ainsi que la loi conditionnelle de S sachant $(N = n)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

b) En déduire la loi conjointe de (N, S).

② a) Écrire une fonction Python `S(p)` qui prend en entrée un flottant $p \in]0,1[$, qui simule le jeu du forain et renvoie la valeur de S.

b) Écrire une fonction Python `espS(p)` qui prend en arguement un flottant $p \in]0,1[$, et qui renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(S)$

c) Écrire une fonction Python `trace_espS()` qui ne prend aucun argument et qui trace $E(S)$ en fonction de p. Que peut-on conjecturer ?

✐ *On fixera la plage des y à l'aide de* `plt.ylim(0,2)` *juste avant d'afficher le graphique. Attention à ne pas évaluer S(0) et S(1).*

③ a) Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$.

b) On admet que $\forall x \in]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(S = k) = \dfrac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$

c) Calculer $\mathbb{E}(S)$. Est-ce que cela correspond à la conjecture de la question 2.c) ?

④ a) Écrire deux fonctions Python `varS(p)` et `trace_varS()` calculant une valeur approchée de la variance de S pour la première et traçant la variance de S en fonction de p pour la deuxième. Que peut-on conjecturer ?

b) Calculer $\mathbb{E}(S(S-1))$.

c) En déduire $\mathbb{V}(S)$. Est-ce que cela correspond à la conjecture de la question a) ?