$\boxed{\text{SUJET 4}}$

Trois salles initialement vides

1) a) $P(U_1) = 1$ (U₁ est un événement certain)

$P(V_1) = 0 = P(W_1)$

b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\{U_k, V_k, W_k\}$ est un S.C.E.

Donc, d'après la F.P.T :

$$P(U_{k+1}) = P(U_{k+1} \cap U_k) + P(U_{k+1} \cap V_k) + P(U_{k+1} \cap W_k)$$

$$= \underbrace{P_{U_k}(U_{k+1})}_{=\frac{1}{3} \text{ car la seule salle non vide a été à nouveau choisie...}} . P(U_k) + \underbrace{P_{V_k}(U_{k+1})}_{=0} . P(V_k) + \underbrace{P_{W_k}(U_{k+1})}_{=0} . P(W_k)$$

$$= \frac{1}{3} P(U_k)$$

$$P(V_{k+1}) = \underbrace{P_{U_k}(V_{k+1})}_{=2/3 \text{ car l'une des 2 salles vides a été choisie}} . P(U_k) + \underbrace{P_{V_k}(V_{k+1})}_{=2/3 \text{ car 2 salles étaient non vides et elles ont été choisies}} . P(V_k) + \overbrace{P_{W_k}(V_{k+1})}^{=0} . P(W_k)$$

$$= \frac{2}{3} P(U_k) + \frac{2}{3} P(V_k)$$

$$P(W_{k+1}) = \underbrace{P_{U_k}(W_{k+1})}_{=0} . P(U_k) + \underbrace{P_{V_k}(W_{k+1})}_{=\frac{1}{3} \text{ car la seule salle non vide a été choisie..}} P(V_k) + \underbrace{P_{W_k}(W_{k+1})}_{=1} P(W_k)$$

$$= \frac{1}{3} P(V_k) + P(W_k)$$

Conclusion

$$\boxed{X_{k+1} = M X_k \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \text{ où } M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

c) On raisonne par récurrence :

(i) $A^0 = I_3$ avec $a_0 = 0 = b_0 = c_0$

$A^1 = A$ avec $a_1 = 2 = a_0 + 2$

$b_1 = 0 = b_0 + 2c_0$

$c_1 = 1 = 2c_0 + 3^0$

(ii) on suppose que :

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_k & 2^k & 0 \\ b_k & c_k & 3^k \end{pmatrix} \text{ où } \begin{cases} a_k = a_{k-1} + 2^k \\ b_k = b_{k-1} + 2c_{k-1} \\ c_k = 2c_{k-1} + 3^{k-1} \end{cases} \text{ pour le fixé } (k \geq 1)$$

(iii) Alors

$$A^{k+1} = A^k . A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_k + 2^{k+1} & 2^{k+1} & 0 \\ b_k + 2c_k & 2c_k + 3^k & 3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{k+1} & 2^{k+1} & 0 \\ b_{k+1} & c_{k+1} & 3^{k+1} \end{pmatrix}$$

en posant $\begin{cases} a_{k+1} = a_k + 2^{k+1} \\ b_{k+1} = b_k + 2c_k \\ c_{k+1} = 2c_k + 3^k \end{cases}$

(iv) on conclut pour tout $k \in \mathbb{N}$,
les suites (a_k), (b_k) et (c_k) se construisent par récurrence ...

② a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1} = a_k + 2^{k+1}$ donc $\sum_{k=0}^{j-1} (a_{k+1} - a_k) = a_j - a_0$

Soit $\sum_{k=0}^{j-1} 2^{k+1} = 2 \frac{1-2^j}{1-2} = 2(2^j - 1) = a_j - a_0$

Conclusion $\boxed{\begin{array}{l} \forall j \in \mathbb{N}^*, \ a_j = 2^{j+1} - 2 \text{ et } a_0 = 2^1 - 2 = 0 \\ \text{Soit } \forall j \in \mathbb{N}, \ a_j = 2^{j+1} - 2 \end{array}}$

b) $j \in [\![1, n]\!]$

$$\sum_{k=1}^{j} \frac{c_k}{2^k} - \sum_{k=1}^{j} \frac{c_{k-1}}{2^{k-1}} = \cancel{\sum_{k=1}^{j} \frac{2c_{k-1}}{2^k}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - \cancel{\sum_{k=1}^{j} \frac{c_{k-1}}{2^{k-1}}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 - (3/2)^j}{1 - 3/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^j - 1 = \frac{3^j - 2^j}{2^j}$$

et $\sum_{k=1}^{j} \frac{c_k}{2^k} - \sum_{k=1}^{j} \frac{c_{k-1}}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{c_k}{2^k} - \frac{c_{k-1}}{2^{k-1}} \right) = \frac{c_j}{2^j} - \frac{c_0}{2^0} = \frac{c_j}{2^j}$

Conclusion $\boxed{c_j = 3^j - 2^j \quad \forall j \in \mathbb{N}}$

c) On rappelle que $b_{k+1}-b_k = 2c_k \quad \forall k\in\mathbb{N}$

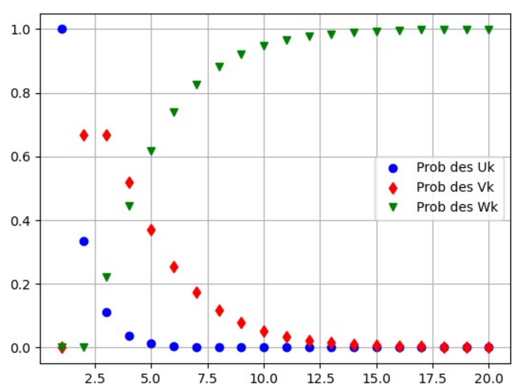
D'où
$$\sum_{k=0}^{j-1}(b_{k+1}-b_k) = b_j = 2\sum_{k=0}^{j-1} c_k$$
$$= 2\left(\sum_{k=0}^{j-1} 3^k - \sum_{k=0}^{j-1} 2^k\right)$$
$$= 2\left(\frac{1-3^j}{1-3} - \frac{1-2^j}{1-2}\right) = 3^j - 1 + (2-2^{j+1})$$

<u>Conclusion</u> $\boxed{b_j = 3^j + 1 - 2^{j+1} \quad \forall j \geq 0}$

③ On peut écrire la fonction suivante :

```
def calculProbas(n):
    Lu, Lv, Lw = [1], [0], [0]
    for k in range(2, n+1):
        Lu.append(Lu[-1]/3)
        Lv.append(2*Lu[-1]/3+2*Lv[-1]/3)
        Lw.append(Lv[-1]/3+Lw[-1])
    return Lu, Lv, Lw
```

une représentation graphique est la suivante :



Il semble qu'à partir de 15 visiteurs, l'événement "les 3 salles sont non vides" soit un événement certain.

④ Très classiquement, on montre par récurrence que

$$X_k = M^{k-1} X_1 \quad \forall k \geq 1 \quad \text{(Puisque } X_{k+1} = M X_k \ \forall k \geq 1\text{)}$$

Dès lors : $\forall k \geq 1$, $X_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} A^{k-1} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k-1}} \begin{pmatrix}1\\a_{k-1}\\b_{k-1}\end{pmatrix}$

<u>Conclusion</u> $\boxed{P(U_k) = \frac{1}{3^{k-1}} \text{ et } P(V_k) = \frac{2^k - 2}{3^{k-1}} \ \forall k \geq 1}$

⑤ a) On utilise que $\{U_k, V_k, W_k\}$ est un S.C.E pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Dès lors,

$P(W_k) = 1 - P(U_k) - P(V_k)$

or $\lim\limits_{k \to \infty} P(U_k) = 0$ car $0 < \frac{1}{3} < 1$

et $\lim\limits_{k \to \infty} P(V_k) = \lim\limits_{k \to \infty} \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) = 0$ car $0 < \frac{2}{3} < 1$

Donc $\lim\limits_{k \to \infty} P(W_k) = 1$

Soit, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_0, \quad |P(W_n) - 1| \leq \varepsilon$
$\Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leq P(W_n) \leq 1 + \varepsilon$.

En particulier pour $\varepsilon = 0.05$:

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_0, \quad P(W_n) \geq 0.95}$$

b) On écrit :

```
def valeur_de_n( )
    n=1 ; pW=0
    while pw < 0.95
        pw = 1-(1/3**(n-1)+2**(n-2)/(3**(n-1)))
    return n
```

Cette fonction nous renvoie $n = 11$