

SUJET 4 -

Exercice : (oral agro-véto 2015)

Une exposition comporte 3 salles. n visiteurs entrent un à un et choisissent au hasard l'une des 3 salles. On s'intéresse au nombre de salles non vides.

Pour tout k avec $1 \leq k \leq n$, on définit l'événement U_k , (respectivement V_k), (respectivement W_k) par :
« A l'issue de l'entrée du k^e visiteur il y a 1 (respectivement 2), (respectivement 3) salles non vides ».

① a) Déterminer $\mathbb{P}(U_1), \mathbb{P}(V_1), \mathbb{P}(W_1)$.

b) On pose $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(U_k) \\ \mathbb{P}(V_k) \\ \mathbb{P}(W_k) \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice M qu'on déterminera telle que $X_{k+1} = MX_k$.

c) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_k & 2^k & 0 \\ b_k & c_k & 3^k \end{pmatrix}$, avec $\begin{cases} a_{k+1} = a_k + 2^{k+1} \\ b_{k+1} = b_k + 2c_k \\ c_{k+1} = 2c_k + 3^k \end{cases}$.

② a) Déterminer a_j en fonction de j .

b) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en calculant de deux façons distinctes $\sum_{k=1}^j \frac{c_k}{2^k} - \sum_{k=1}^j \frac{c_{k-1}}{2^{k-1}}$ montrer que $c_j = 3^j - 2^j$.

c) En déduire b_j en fonction de j .

③ Écrire une fonction Python d'argument n permettant d'obtenir l'évolution au cours des n premiers pas de temps des probabilités $\mathbb{P}(U_k)$, $\mathbb{P}(V_k)$ et $\mathbb{P}(W_k)$.

En donner une représentation graphique avec $n = 20$ que vous commenterez.

④ Montrer que $\mathbb{P}(U_n) = \frac{1}{3^{n-1}}$ et $\mathbb{P}(V_n) = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$.

⑤ a) Pourquoi peut-on dire qu'à partir d'un certain nombre n de visiteurs on aura 95 chances sur 100 d'avoir les trois salles occupées ?

b) Déterminer grâce à un script la valeur exacte de n .