# SUJET 3

| U | V |
| --- | --- |
| 1 B, 2 R | 1 B, 3 R |

**Etape 1** : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$ : $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $P(X=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \forall k\in\mathbb{N}^*$.

**Etape 2** : Si $(X=k)$ est réalisé, alors on effectue $k$ tirages avec remise dans U puis des tirages dans V. $Y$ est alors le rang de la première blanche.

① On commence par modéliser une loi uniforme de paramètre $p=1/2$ puis on modélise $X$ tirages dans U, suivis (si besoin) de tirages dans V jusqu'à obtenir la première blanche.

Une rédaction possible est la suivante :

```python
def simulGeom(p):
    x = 1
    while rdm.random() > p:
        x += 1
    return x

def simulY()
    X = simulGeom(1/2)
    Y = 1
    while Y <= X and rdm.random() > 1/3 :
        Y += 1
    if Y <= X:
        return Y  # une blanche dans U.
    else :
        return Y + simulGeom(1/4)
        # on a poursuivi dans l'urne V
```

② $(n,s)\in(\mathbb{N}^*)^2$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} q^k = \begin{cases} q\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{si } q\neq 1 \\ n & \text{si } q=1 \end{cases}}$$

- Si $|q|\geq 1$ alors $\sum_{k\geq s} q^k$ diverge.
- Si $|q|<1$, alors $\sum_{k\geq s} q^k$ converge et

$$\boxed{\sum_{k=s}^{\infty} q^k} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=0}^{s-1} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^s}{1-q} = \boxed{\frac{q^s}{1-q}}$$

③ a) <u>Question de cours</u> $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right) : E(X) = 2 \; ; \; V(X) = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2}$

b) $\ell \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P(X \geq \ell) = P(X > \ell - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1}}$

Par le calcul ou en disant que $(X > \ell-1)$ est réalisé si, et seulement si, la pièce a amené que des Pile au cours des $(\ell-1)$ premiers lancers (indépendants).

④ Si $(Y=1)$ est réalisé, le tirage de la boule blanche a eu lieu dans l'urne U.

$$P(Y=1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Y=1, X=i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{(X=i)}(Y=1) \cdot P(X=i)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot P(X=i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} P(X=i) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=2) = P(Y=2, X \geq 2) + P(Y=2, X<2) \quad [\text{FPT avec } \{(X\geq 2), (X<2)\} \text{ SCE}]$$
$$= P(X \geq 2, Y=2) + P(X=1, Y=2)$$
$$= P(X \geq 2) P_{(X \geq 2)}(Y=2) + P(X=1) \cdot P_{(X=1)}(Y=2)$$

D'après ③b)

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 P_U(Y=2) + \frac{1}{2} P[R_U^1 \cap B_V^2] \quad \text{Ev}^{ts} \text{ indépendants}$$
$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{4+3}{36} = \frac{7}{36}$$

~~[conforté par ⑤ qui~~

<u>Remarque</u> : Résultat conforté par la question ⑤ qui demande de montrer que :

$$P(Y=2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{20} + \frac{2}{45} = \frac{27+8}{180} = \frac{35}{180}$$
$$= \frac{7}{36} \ldots$$

<u>Conclusion</u> $\boxed{P(Y=1) = \frac{1}{3} \text{ et } P(Y=2) = \frac{7}{36}}$

⑤ Plus généralement, avec le système complet d'événements, $\{(X \geq \ell), (X<\ell)\}$ $(\ell \in \mathbb{N}^*)$, on obtient d'après la F.P.T :

$$P(Y=\ell) = P(Y=\ell, X \geq \ell) + P(Y=\ell, X<\ell)$$
$$= P_{(X \geq \ell)}(Y=\ell) \cdot P(X \geq \ell) + P(Y=\ell, X<\ell)$$

avec

$$P_{(X \geq \ell)}(Y=\ell) = P_U(Y=\ell) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1} \cdot \frac{1}{3} \text{ et } P(X \geq \ell) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1} \text{ (cf. ③b))}$$

Par ailleurs :

$$P(Y=\ell,\ X<\ell) = \sum_{i=1}^{\ell-1} P(Y=\ell,\ X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell-1} P_{(X=i)}(Y=\ell).P(X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell-1} P\left[R_U^1 \cap R_U^2 \cap \ldots \cap R_U^i \cap R_V^{i+1} \cap \ldots \cap R_V^{\ell-1} \cap B_V^{\ell}\right].P(X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell-1} \left[\left(\frac{\cancel{2}}{3}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1-i} \frac{1}{4}\right].\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)^i$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{4}{3}\right)^i$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} \frac{\cancel{4}}{9} \frac{1-(4/9)^{\ell-1}}{1-4/9} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^{\ell-1}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1}$$

D'où, $\forall \ell \geq 1$ :

$$P(Y=\ell) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1} + \left[\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1}\right]$$

$$P(Y=\ell) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1}\underbrace{\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right]}_{=\frac{2}{15}}$$

$$\boxed{P(Y=\ell) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell}}$$

(6) On pourra se contenter d'écrire (Loi faible des Gds Nb)

```
>>> sum([formulY() for _ in range(10000)])/10000
```

(7) $\sum_{\ell \geq 1} \ell (3/4)^{\ell-1}$ cv car $0 < 3/4 < 1$ de somme $S_1 = \frac{1}{(1-3/4)^2} = 16$

$\sum_{\ell \geq 1} \ell (1/3)^{\ell}$ cv car $0 < 1/3 < 1$ de somme $S_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{3}{4}$

D'où $\underbrace{E(Y) \text{ existe}}_{\text{C.L. de séries convergentes}}$ et $E(Y) = \frac{1}{5} S_1 + \frac{2}{5} S_2 = \frac{16}{5} + \frac{3}{10} = \boxed{\frac{35}{10}}$

[Confirmé par (6)...]