

## SUJET 3 -

**Exercice : (oral agro-véto 2022)**

On dispose d'une pièce équilibrée et de deux urnes. L'urne U contient 1 boule blanche et 2 boules rouges, tandis que l'urne V contient 1 boule blanche et 3 boules rouges.

On suit le protocole suivant :

**Étape 1** on effectue des lancers successifs de la pièce jusqu'à obtention du premier Face. On note alors  $X$  le numéro du lancer amenant Face pour la première fois.

**Étape 2** Si le premier face est obtenu lors du  $k$ -ième lancer, on effectue  $k$  tirages d'une boule avec remise dans U, suivis d'une succession infinie de tirages d'une boule avec remise dans V.

On note  $Y$  le numéro du tirage dans les urnes amenant une boule blanche pour la première fois.

Ainsi, si on a obtenu la succession *pile, pile, face*, alors  $X$  vaut 3, on effectue alors 3 tirages dans U, puis une succession de tirages dans V.

Si on obtient les couleurs de boules suivantes successivement *rouge, rouge, rouge, rouge, blanche*, alors  $Y$  vaut 5.

① Écrire une fonction permettant de simuler une réalisation de  $Y$ .

② Soient  $n, s$  deux entiers naturels non nuls. Rappeler les valeurs de  $\sum_{k=1}^n q^k$  et  $\sum_{k=s}^{+\infty} q^k$  où  $q$  est un réel.

On précisera les conditions de validité des formules énoncées.

③ a) Préciser la loi de  $X$ , ainsi que son espérance et sa variance.

b) Soit  $\ell$  un entier naturel non nul. Déterminer  $\mathbb{P}(X \geq \ell)$ .

④ Déterminer  $\mathbb{P}(Y = 1), \mathbb{P}(Y = 2)$ .

⑤ Démontrer que pour tout  $\ell \geq 1, \mathbb{P}(Y = \ell) = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} + \frac{2}{5} \frac{1}{3^\ell}$ .

⑥ À l'aide du programme réalisé en première question, donner une estimation de l'espérance de  $Y$ . Quel résultat du cours utilise-t-on ?

⑦ Vérifier que  $Y$  admet une espérance et la calculer.