SUJET 2

les (X_n) sont mutuellement indépendants. avec $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{-1,1\}}$ $\forall n \geq 1$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

① On modélise la loi uniforme sur $\{-1,1\}$ à l'aide de rdm.random() $\hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1[}$ en rappelant que:

$$X_k(\Omega) = \{-1,1\} \; ; \; P(X_k = -1) = \frac{1}{2} = P(X_k = 1)$$

```
def simulS(n: int) -> float:
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        if rdm.random() <= 1/2:
            S += -1
        else
            S += 1
    return S
```

② On suppose ici que $\alpha = 0.8$; On estime la probabilité de l'événement $(S_n \geq n^\alpha)$ en calculant la fréquence des succès $(S_n \geq n^\alpha)$ au cours d'un nombre m supposé grand d'épreuves.
Soit

```
def valApprochee(alpha=0.8, m=10000) -> float:
    LvA = []
    for n in range(1, 11):
        Cpt = 0
        for i in range(m):
            if simulS(n) >= n**alpha:
                Cpt += 1
        LvA.append(Cpt/m)
    return LvA
```

l'appel à cette fonction retourne :

LvA = [0.498, 0.255, 0.126, 0.063, 0.034, 0.016, 0.06, 0.04, 0.019, 0.012]

③ Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $E(e^{tX_k}) = \sum_{i \in X_k(\Omega)} e^{ti} P(X_k = i)$

$$= e^{-t} P(X_k = -1) + e^{t} P(X = 1)$$

Conclusion $\boxed{E(e^{tX_k}) = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}, \forall k \in \mathbb{N}^*}$

Dès lors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$E(e^{tS_n}) = E\left(e^{t\sum_{k=1}^n X_k}\right) = E\left[\prod_{k=1}^n e^{tX_k}\right]$$

or les X_k sont indépendantes, donc par application du lemme de coalition, les e^{tX_k} sont indépendantes.

Dès lors, $E(e^{tS_n}) = \prod_{k=1}^n E(e^{tX_k})$

Conclusion $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(e^{tS_n}) = \left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^n}$

(4) a) . Pour $k=0$, $(2k)! = 0! = 1 \geq 2^0 . 0! = 1$.

. On suppose que $(2k)! \geq 2^k . k!$ pour k fixé ($k \in \mathbb{N}$)

. Alors $[2(k+1)]! = (2k+2)! = (2k+2).(2k+1)(2k)!$

$$\geq (2k+2)(2k+1).2^k.k!$$

$$\geq (2k+1)2^{k+1}(k+1)!$$

$2k+2 = 2(k+1)$

or $2k+1 \geq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

Conclusion $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, (2k)! \geq 2^k . k!}$

b) On rappelle que $e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$ $\forall u \in \mathbb{R}$.

Donc

$$e^{t^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k . k!}$$

; $(2k)! \geq 2^k.k! \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{(2k)!} \leq \frac{1}{2^k.k!}$

$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \geq 0$$

or $\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^k}{k!} + \frac{(-t)^k}{k!}\right]$ (sommes de séries convergentes)

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

donc $\boxed{e^{t^2/2} \geq \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}}$

⑤ On rappelle que si $X(\Omega)\subset\mathbb{R}_+$ / $\mathbb{E}(X)$ existe, on a :
$\forall \lambda>0,\ P(X\geq\lambda)\leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$.

Dans ce sujet, $e^{tS_n}(\Omega)\subset\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^n$

D'où, par application de l'inégalité de Markov :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t>0,\ \forall s>0$,

$$P[e^{tS_n}\geq e^{ts}] \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{ts}} = \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{e^{ts}}$$

$$\Rightarrow P[tS_n\geq ts] \leq e^{nt^2/2}\cdot\frac{1}{e^{ts}} = e^{\frac{nt^2}{2}-ts}.$$

D'après ④ b)

Conclusion (t>0)

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t>0,\ \forall s>0,\quad P(S_n\geq s)\leq e^{\frac{nt^2}{2}-ts}}$$

⑥ Comme recommandé par l'énoncé, on étudie $\varphi : t\mapsto \frac{nt^2}{2}-ts$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec $s>0$ fixé).

φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi'(t) = \underbrace{n}_{>0}t - s = 0 \Leftrightarrow t = \frac{s}{n}$$

$\varphi(t) \underset{\infty}{\sim} \frac{n}{2}t^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{\infty}\varphi(t) = \infty$.

t	0		s/n		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	∞

$$\varphi\left(\frac{s}{n}\right) = n\frac{s^2}{n^2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{s}{n}\cdot s = \frac{1}{2}\frac{s^2}{n} - \frac{s^2}{n} = -\frac{1}{2}\frac{s^2}{n} = m$$

Or $P(S_n\geq s)\leq e^{\varphi(t)}\quad \forall t\in\mathbb{R}_+^*$

Cette inégalité est donc vraie en particulier pour $t=\frac{s}{n}$

Conclusion

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall s>0,\ P(S_n\geq s)\leq e^{-s^2/2n}}$$

⑦ Soit $\alpha>\frac{1}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\underline{P(S_n\geq n^\alpha)\leq e^{-n^{2\alpha}/2n} = e^{-\frac{1}{2}n^{2\alpha-1}}}$ d'après 6) car $n^\alpha>0$.

D'où

$$0\leq n^2P(S_n\geq n^\alpha)\leq n^2e^{-\frac{1}{2}n^{2\alpha-1}}$$

or $n^2 e^{-\frac{\lambda}{2} n^{2\alpha-1}} = 0$ car $x^a = o(e^{x^b})$ $\forall a>0, b>0$
et $\alpha > 1/2 \Rightarrow 2\alpha - 1 > 0$.

d'où $\boxed{\lim_{n\to\infty} n^2 P(S_n \geq n^\alpha) = 0}$ (théorème d'encadrement des limites).

(8) D'après la définition de la limite : ($\varepsilon = 1$)

$\exists N \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq N, \ 0 \leq n^2 P(S_n \geq n^\alpha) \leq 1$

D'où $\boxed{\exists N \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq N, \ P(S_n \geq n^\alpha) \leq \frac{1}{n^2}}$

or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente
donc, par application du théorème de convergence par comparaison des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} P(S_n \geq n^\alpha) \text{ converge}}$$