SUJET 2 -

Exercice :

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
On suppose que chacune suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{-1, 1\}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

L'objectif de cet exercice est de démontrer que pour tout réel $\alpha > 1/2$, la série de terme général $\mathbb{P}(S_n \geq n^\alpha)$ converge.

① Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument un entier n, simule une réalisation de la variable aléatoire S_n et renvoie la valeur obtenue.

② Dans cette question $\alpha = 0.8$. Écrire un script utilisant la fonction précédente qui affiche sous forme de liste les valeurs approchées de $\mathbb{P}(S_n \geq n^\alpha)$ pour les valeurs de n allant de 1 à 10.

③ Soit t un réel strictement positif.
Calculer l'espérance de la variable e^{tX_k} pour tout entier naturel k non nul. Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(e^{tS_n}) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n$$

④ a) Démontrer que pour tout entier naturel k, $(2k)! \geq 2^k k!$.

b) En utilisant l'écriture de e sous forme de somme d'une série, établir alors l'inégalité :

$$\forall t > 0,\ \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \leq e^{t^2/2}$$

⑤ En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire e^{tS_n}, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t > 0,\ \forall s > 0,\ \mathbb{P}(S_n \geq s) \leq exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right)$$

⑥ Justifier l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall s > 0,\ \mathbb{P}(S_n \geq s) \leq exp\left(-\dfrac{s^2}{2n}\right)$.

✐ *On pourra étudier les variations sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{nt^2}{2} - ts$ pour $s > 0$ fixé.*

⑦ Soit $\alpha > 1/2$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(S_n \geq n^\alpha) \leq e^{-\frac{1}{2}n^{2\alpha-1}}$, puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\mathbb{P}(S_n \geq n^\alpha)$.

⑧ Justifier qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq N,\ \mathbb{P}(S_n \geq n^\alpha) \leq \frac{1}{n^2}$$

puis conclure.