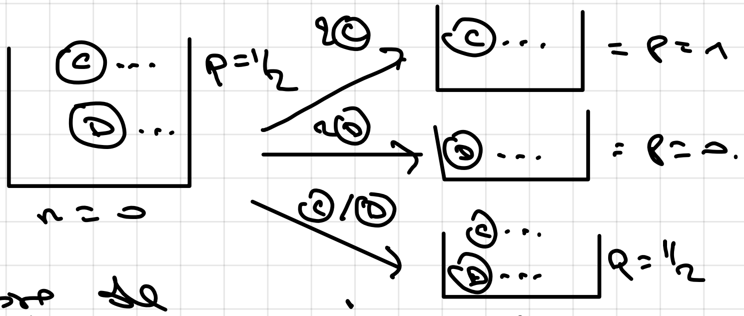
SUJET 1



X_n VAR égale au nombre de bactéries de type C à l'urne de la $n^{ème}$ expérience.
$X_0 = 1$

Rq : le tirage de 2 bactéries est assimilé à un tirage aléatoire avec remise de 2 bactéries [cf condition d'approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale...]

(1)

```
def simulX(n):
    p = 1/2
    for k in range(1, n+1):
        B1 = rdm.random()
        B2 = rdm.random()
        if B1<p and B2<p:   # 2 bactéries C
            return 2
        elif B1>=p and B2>=p:   # 2 bactéries D
            return 0
    return 1
```

(2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{(X_n=0), (X_n=1), (X_n=2)\}$ est un S.C.E.
Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\cdot\ P(X_{n+1}=0) = 1.P(X_n=0) + P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0).P(X_n=1) + 0$$

{ Conditionnée par $(X_n=1)$, $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(2, 1/2) \Rightarrow \begin{cases} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) = (1/2)^2 \\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = 2(1/2)^2 \\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) = (1/2)^2 \end{cases}$

D'où
$$P(X_{n+1}=0) = P(X_n=0) + \frac{1}{4}.P(X_n=1)$$

Et par un raisonnement analogue :

$$\cdot\ P(X_{n+1}=1) = 0.P(X_n=0) + \underbrace{P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)}_{=1/2}.P(X_n=1) + 0\,P(X_n=2)$$

$$\cdot\ P(X_{n+1}=2) = 0.P(X_n=0) + \underbrace{P_{(X_n=1)}.P(X_{n+1}=2)}_{=1/4}.P(X_n=1) + \underbrace{P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)}_{=1}.P(X_n=2)$$

Conclusion $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1} = A.L_n \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}}$

② b) Récurrence vraiment classique : $L_1 = AL_0$; $L_0 = A^0 L_0$
on suppose $L_n = A^n L_0$ pour n fixé ($n \geq 0$)
Alors
$$L_{n+1} = A.L_n = A(A^n L_0) = A^{n+1} L_0.$$

Conclusion $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = A^n . L_0 \text{ où } L_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

③ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ / $A = \mathcal{M}_B(f)$ où B base canonique de $\mathbb{R}^3$

a) $rg(A) = 3 = rg(f)$

Conclusion $\boxed{A \text{ inversible} \Leftrightarrow f \text{ automorphisme}}$

b) $rg(A - I) = rg \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} = 1 < 3$

Donc $\underline{1 \in Sp(A)}$ et $\underline{\dim E_1(f)} = \dim[\operatorname{Ker}(A - I)] = 3 - 1 = \underline{2}$

Par ailleurs,

$(x, y, z) \in E_1(f) \Leftrightarrow (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 0$

Conclusion $\boxed{\begin{array}{l} 1 \in Sp(f) \text{ et } E_1(f) = \{(x, 0, z),\ x, z \in \mathbb{R}\} \\ \qquad = \operatorname{Vect}\{e_1, e_3\} \end{array}}$

c) $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; Conclusion $\boxed{(1, -2, 1) \in E_{1/2}(f)}$

d) D'après ce qui précède : $\dim E_{1/2}(f) \geq 1$; $\dim E_1(f) = 2$
et
$3 \leq \dim E_{1/2}(f) + \dim E_1(f) \leq 3$

D'où $\dim E_{1/2}(f) + \dim E_1(f) = 3$ et $Sp(f) = \{1/2, 1\}$

Conclusion $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$

④ Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ / $PX' = X$ (S)

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x' + z' = x \\ -2z' = y \\ y' + z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 1/2\, y \\ y' = z + 1/2\, y \\ z' = -1/2\, y \end{cases}$: (S) est un $\underline{\text{syst. de Cramer.}}$

Conclusion $\boxed{P \text{ inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}}$

b) $B' = (e_1, e_3, u)$ où $u = (1, -2, 1)$ est une famille libre (car P qui est la matrice des coordonnées de cette famille dans la base canonique est inversible) et de bon cardinal.

Donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de v.p de f.

Conclusion $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = P^{-1} A P}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P D^n P^{-1}$ [se montre par récurrence si demandé)

Soit

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1/2^n & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 - 1/2^n & 0 \\ 0 & 1/2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 - 1/2^n & 2 \end{pmatrix}$$

; Conclusion $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 - 1/2^{n+1} & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 1/2 - 1/2^{n+1} & 1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}}$

5) $\begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - 1/2^{n+1} \\ 1/2^n \\ 1/2 - 1/2^{n+1} \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Conclusion $\boxed{\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = 1/2 = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 2) \ ; \ \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = 0}$

6) $U = (0 \ 1 \ 2) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

a) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ U L_n = 0 \cdot P(X_n = 0) + 1 P(X_n = 1) + 2 P(X_n = 2) = E(X_n)}$

b) D'après 5 on a:

$$E(X_n) = \frac{1}{2^n} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n} = 1. \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Conclusion $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ E(X_n) = 1}$ [ce que confirme notre simulation Python...)