SUJET 1 -

Exercice : (oral agro-véto 2021)

On réalise l'expérience suivante : à l'instant initial ($n = 0$) une éprouvette contient une bactérie de type C et une bactérie de type D. On laisse reproduire les bactéries en millions d'exemplaires, les proportions restant inchangées puis on y prélève au hasard 2 bactéries, et on désigne par X_1 le nombre de bactéries de type C ainsi prélevées.
On place les deux bactéries ainsi prélevées dans une nouvelle éprouvette pour y reproduire la même expérience et ainsi de suite. On désigne par X_n la variable aléatoire donnant le nombre de bactéries de type C prélevées à l'issue de la n-ième expérience et X_0 représentant la variable aléatoire certaine égale à 1.
Considérant le grand nombre de bactéries, le tirage aléatoire des deux bactéries est assimilable à un tirage aléatoire de deux bactéries avec remise.
On note $L_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$ avec $L_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

① Écrire une fonction `python` qui permet de simuler la variable aléatoire X_n.

② a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = AL_n$.
  b) Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = A^n L_0$.

③ On définit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
  a) f est-il un automorphisme ?
  b) Montrer que 1 est une valeur propre de f et déterminer le sous espace propre associé à 1.
  c) Montrer que $u = (1, -2, 1)$ est un vecteur propre de f.
  d) Justifier que f est diagonalisable.

④ On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
  a) Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
  b) Montrer que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale qu'on précisera.
  c) Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 1 \end{pmatrix}$

⑤ Déterminer $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(X_n = 0)$, $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(X_n = 2)$

⑥ On définit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.
  a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = UL_n$.
  b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{E}(X_n)$.