Variables aléatoires discrètes et algèbre linéaire

Exercice

① **La cas des variables aléatoires discrètes finies**. Soient n un entier naturel et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $I_n = [\![0, n]\!]$.

a) *Montrons que g_X est une fonction polynôme à coefficients réels dont on précisera le degré maximal. Quelle est la valeur de $g_X(1)$?*
Si $X(\Omega) \subset I_n = [\![0, n]\!]$, alors $a_k = \mathbb{P}(X = k) = 0$, $\forall k > n$. D'où :
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$. Ce qui prouve que g_X est un polynôme de degré **au plus** n.
$g_X(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1$ puisque $X(\Omega) \subset I_n = [\![0, n]\!]$.
Conclusion : $\boxed{g_X(1) = 1}$.

Lu dans le rapport de jury : « *[AgroB 2011] Certains candidats conservent des séries et parlent de polynômes de degré infini. On voit des formules mathématiques fausses, par exemple : pour tout k de I_n, pour tout x $g_x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, quelques résultats fantaisistes, par exemple : $g_X(1) = a_0 + a_1$ ou $g_X(1) = \dfrac{n+1}{2}(a_0 + a_n)$* ».

b) g_X est une fonction polynôme. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. Un calcul immédiat donne :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k k t^{k-1}$$
soit
$$\boxed{g_X'(1) = \sum_{k=1}^{n} a_k k = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X)}$$
De même :
$$g_X''(t) = \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1) t^{k-2} \text{ et donc } g_X''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X(X-1))$$
D'après le théorème de transfert.

Dès lors, d'après le théorème de Koënig-Huygens et par linéarité de l'intégrale :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}^2(X)$$
Conclusion : $\boxed{\mathbb{V}(X) = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2}$

c) *Calculons la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p avec $p > 0$:*
Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (pt + q)^n$. (On a posé $q = 1 - p$).

Lu dans le rapport de jury : « *[AgroB-2011] Résultat trouvé dans environ 60% des copies* ».

Retrouvons grâce à cette fonction l'espérance et la variance d'une loi binomiale de paramètres n et p : Il suffit, d'après 1.c) de calculer $g'_X(t) = np(pt+q)^{n-1}$ et $g''_X(t) = n(n-1)p^2(pt+q)^{n-2}$.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X) = g'_X(1) = np(p+q) = np}$ et $\boxed{V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)}$

② **La cas des variables aléatoires discrètes infinies**.

a) *Montrons que pour tout $t \in [-1,1]$, la série $\sum a_n t^n$ est absolument convergente. En déduire que g_X est définie sur $[-1,1]$ et donner la valeur de $g_X(1)$:*

$\forall t \in [-1,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n t^n| \leqslant a_n$.

Par définition d'une loi de probabilité (σ-additivité), la série $\sum a_n$ converge, et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ vaut 1 car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Par application du théorème de comparaison des séries à termes positifs nous pouvons conclure que la série $\sum a_n t^n$ converge absolument. Or la convergence absolue entraîne la convergence.

Conclusion : $\boxed{g_X \text{ est défini sur } [-1,1] \text{ et } g_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1}$.

Remarque : On pouvait aussi écrire que $\forall t \in [-1,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n t^n| \leqslant |t^n|$.
Or, $\forall t \in]-1,1[$, $\sum |t^n| = \sum |t|^n$ converge car c'est une série géométrique avec $|t| < 1$ donc, par application du théorème de comparaison, $\sum |a_n t^n|$ converge.
Par ailleurs, pour $|t| = 1$, $\sum |a_n t^n| = \sum |a_n| = \sum a_n$ converge de somme égale à 1. Ce qui permet de conclure que $\sum a_n t^n$ converge absolument et donc que g_X est défini sur $[-1,1]$.

Lu dans le rapport de jury : « *Question très rarement bien traitée (10% des candidats montrent correctement l'absolue convergence).*
La majoration $|a_k t^k| \leq |t^k|$ ne permet de montrer l'absolue convergence que lorsque $|t| < 1$. Le cas $|t| = 1$ doit alors être étudié à part, ce que les candidats remarquent très rarement. La solution la plus rapide consiste à effectuer la majoration $|a_k t^k| \leq a_k$. Quelques candidats se lancent dans des calculs avec des séries !!
Parmi les erreurs rencontrées dans plusieurs copies, on trouve :
- la série de terme général $a_k|t|^k$ est une série géométrique...
- $\lim\limits_{k\to+\infty} |a_k t^k| = 0$, donc la série est absolument convergente... - $a_k|t|^k$ est majorée par 1, donc la série est absolument convergente...
- des candidats écrivent $|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k |t|^k$, pour en déduire la convergence de la série... »

b) Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. *Montrons que si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $t \in [-1,1]$, $g_{X+Y}(t) = g_X(t) g_Y(t)$:*

Si X et Y sont indépendantes, alors $\forall t \in [-1,1]$ les variables aléatoires t^X et t^Y sont indépendantes et admettent des espérances d'après l'énoncé.

Donc $g_{X_1+X_2}(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2}) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)$.

$$\boxed{g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)}$$

c) ☺ On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. *Calculons $g_X(t)$ pour $t \in [-1,1]$ (on pourra poser $q = 1-p$). En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$.*

On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
Alors la question 2.a) justifie l'existence de $g_X(t)$ pour tout $t \in [-1,1]$ (sinon on écrit que la série $\sum_{k\geq 1} pq^{k-1}t^k$ est de même nature que $\sum_{k\geq 1}(qt)^{k-1} = \sum_{i\geq 0}(qt)^i$ qui est une série géométrique convergente).

$$\forall t \in [-1,1],\ g_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}t^k = pt\sum_{k=0}^{+\infty}(qt)^k = \frac{pt}{1-qt}, \text{ car } |qt| < 1$$

Lu dans le rapport de jury : « *Cette question a permis aux élèves moyens, mais sérieux, de faire la différence.*
Attention, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: trop de candidats ont commencé la somme à 0. Trop ont oublié ou n'ont pas justifié correctement la convergence de la série géométrique. »

On rappelle ensuite que $\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$.
Or $g'_X(t) = \dfrac{p(1-qt)+qpt}{(1-qt)^2} = \dfrac{p}{(1-qt)^2}$.
✐ On note que $\forall t \in [-1,1]$, $1 - qt \neq 0$ puisque $t = 1/q$ impossible (en effet : $\frac{1}{q} > 1$)

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ existe et vaut } \mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p}}$

✐ Pour la méthode « usuelles », on se rapportera au cours.

d) On suppose ici que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

i. ☺ *Calculons $g_X(t)$ pour $t \in [-1,1]$ et retrouvons l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$:*

On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Alors,$\forall t \in [-1,1]$, $g_X(t)$ est la somme d'une série convergente et :

$$\forall t \in [-1,1],\ g_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Souvent bien traitée.* »

Pour $\mathbb{E}(X)$, $g'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$, donc $\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ existe et vaut } \mathbb{E}(X) = g'_X(1) = \lambda}$

ii. ☺ Si X et Y sont deux variables indépendantes qui suivent respectivement une loi de Poisson de paramètre λ et μ. *Déterminons $g_{X+Y}(t)$ et en déduire que $X+Y$ suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre :*

Par application de la question 2.b) on obtient que $S = X+Y$ admet pour fonction génératrice :

$$g_S(t) = g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$$

On reconnait la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
La fonction génératrice caractérisant la loi d'une variable aléatoire, on peut conclure que :

$$\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)}$$

Problème :

Partie I : Évolution proportionnelle

Dans cette partie, on propose d'étudier une situation où, à un instant donné n, l'agent contaminant responsable de la transmission de V peut être actif ou inactif. A tout instant n, on a la probabilité p qu'il soit actif, et la probabilité $1-p$ qu'il soit inactif, $p \in]0,1[$ étant fixé.
On considère de ce fait une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de même loi de Bernoulli de paramètre p, U_n valant 1 si l'agent est actif à l'instant n et 0 s'il est inactif. On supposera de plus que les $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants et que U_n est indépendant de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On convient que lorsque l'agent contaminant est actif à l'instant $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'individus de $\mathcal{P}$ contaminé augmente d'un facteur $\alpha \in]0,1[$ entre les instants n et $n+1$ et que, s'il est inactif, ce nombre diminue d'un facteur α, si bien que pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\begin{cases} U_n(\omega) = 1 & \Rightarrow X_{n+1}(\omega) = (1+\alpha)X_n(\omega) \\ U_n(\omega) = 0 & \Rightarrow X_{n+1}(\omega) = (1-\alpha)X_n(\omega) \end{cases}$$

① On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ dans toute cette question.

a) *Établissons que $X_n = (1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}X_{n-1}$;*
On note que $\{U_{n-1}=0), (U_{n-1}=1)\}$ est un système complet d'événements.
— Si $U_{n-1}(\omega) = 1$ alors $1 - U_{n-1}(\omega) = 0$.
Donc $(1+\alpha)^{U_{n-1}(\omega)}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}(\omega)}X_{n-1}(\omega) = (1+\alpha)X_{n-1}(\omega) = X_n(\omega)$
— Si $U_{n-1}(\omega) = 0$ alors $1 - U_{n-1}(\omega) = 1$.
Donc $(1+\alpha)^{U_{n-1}(\omega)}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}(\omega)}X_{n-1}(\omega) = (1-\alpha)X_{n-1}(\omega) = X_n(\omega)$
Dès lors

$$\forall\omega \in \Omega,\ (1+\alpha)^{U_{n-1}(\omega)}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}(\omega)}X_{n-1}(\omega) = X_n(\omega)$$

Conclusion : $\boxed{(1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}X_{n-1} = X_n}$

b) *Justifions le fait que $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left((1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}\right)\mathbb{E}(X_{n-1})$:*
Par hypothèse, U_n et X_n sont indépendantes pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc par application du lemme de coalition, on peut assurer que $(1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}$ et X_{n-1} sont indépendantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Or, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left((1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}\right)\cdot\mathbb{E}(X_{n-1})}$

c) *Déduisons-en que : $\mathbb{E}(X_n) = (1+(2p-1)\alpha)\,\mathbb{E}(X_{n-1})$:*
Il suffit de déterminer $\mathbb{E}\left((1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}\right)$ et pour ça nous appliquons le théorème de transfert avec, par définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}\right) &= \sum_{k=0}^{1}(1-\alpha)^{1-k}(1+\alpha)^k\mathbb{P}(U_{n-1}=k) \\ &= (1-\alpha)\mathbb{P}(U_{n-1}=0) + (1+\alpha)\mathbb{P}(U_{n-1}=1) \\ &= (1-\alpha)(1-p) + (1+\alpha)p = 1 + (2p-1)\alpha\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = (1+(2p-1)\alpha)\,\mathbb{E}(X_{n-1}),\ \forall n \in \mathbb{N}^*}$

d) *Donnons l'espérance de X_n en fonction de celle de X_0 :*
La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1 + (2p-1)\alpha$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, \mathbb{E}(X_n) = (1+(2p-1)\alpha)^n \mathbb{E}(X_0)}$

e) Si on suppose que $\mathbb{E}(X_0) > 0$, alors la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si et seulement si
$$q = 1 + (2p-1)\alpha > 1 \Leftrightarrow (2p-1)\alpha > 0 \Leftrightarrow 2p - 1 > 0 \text{ (Noter que } q < -1 \text{ impossible)}$$
Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty \text{ si } p > 1/2}$

En conséquence, il faut supposer $p \leq 1/2$ pour que le modèle puisse être jugé *raisonnable* mais ce n'est pas une condition suffisante et il faut regarder de plus près ce qui se passe sous cette condition.

② On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} U_k$.

a) *Quelle est la loi de S_n ?* C'est une question de cours. S_n est somme de n variable aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre p. Donc $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$

b) *Montrons que $X_n = (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}X_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:*
On raisonne par récurrence :
— Pour $n = 1$, $S_1 = U_0$ et, d'après la question 1.a) nous savons que :
$$X_1 = (1+\alpha)^{U_0}(1-\alpha)^{1-U_0}X_0$$
Soit $X_1 = (1+\alpha)^{S_1}(1-\alpha)^{1-S_1}X_0$. Ce qui assure l'initialisation de la récurrence.
— Supposons que $X_{n-1} = (1+\alpha)^{S_{n-1}}(1-\alpha)^{n-1-S_{n-1}}X_0$, pour $n \geq 2$.
— Alors, toujours d'après la question 1.a) :
$$\begin{aligned}
X_n &= (1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}X_{n-1} \\
&= (1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}} \cdot (1+\alpha)^{S_{n-1}}(1-\alpha)^{n-1-S_{n-1}}X_0 \\
&= (1+\alpha)^{U_{n-1}+S_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}+n-1-S_{n-1}}X_0 \\
&= (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}X_0 \text{ car } S_n = U_{n-1} + S_{n-1}
\end{aligned}$$

— ***Conclusion*** : $\boxed{X_n = (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}X_0,\, \forall n \in \mathbb{N}^*}$

c) *Quelle est, en fonction de X_0, la valeur maximale M_n que peut prendre X_n ?*
n étant fixé ($n \in \mathbb{N}^*$), on note que $(1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n} = (1-\alpha)^n \left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{S_n}$.

Comme $\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} > 1$, la fonction $t \longmapsto \left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^t$ est croissante.

X_n prend donc sa valeur maximale pour la plus grande valeur possible prise par S_n.
Or $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ donc $S_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et par conséquent $S_n \leq n$.

X_n prend donc sa valeur maximale pour $S_n = n$ et vaut $M_n = (1+\alpha)^n(1-\alpha)^{n-n}X_0$

Conclusion : $\boxed{\text{La valeur maximale } M_n \text{ que peut prendre } X_n \text{ vaut : } M_n = (1+\alpha)^n X_0}$.

d) Il est immédiat que $\lim_{n\to\infty} (1+\alpha)^n = +\infty$ car $1 + \alpha > 1$.
Donc, si $X_0 > 0$ (c'est-à-dire qu'il y a au moins un porteur de virus à l'instant initial de l'étude), alors $\boxed{\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty}$.

✐ ***Remarque :*** *Le résultat précédent semble empêcher la possibilité que le modèle proposé soit raisonnable. Néanmoins, ce maximum M_n n'est atteint qu'au rang n que si l'agent contaminant s'est montré actif lors des n premiers instants (En effet, $(S_n = n)$ est réalisé si, et seulement si $(U_k = 1)$ est réalisé pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$).*
Si p est faible et n grand, la probabilité d'avoir une telle séquence est infime.

③ Fors de la remarque ci-dessus, nous cherchons dans la suite à quantifier de façon plus rigoureuse le risque que X_n devienne très grand ,en évaluant la probabilité $\mathbb{P}(X_n > X_0)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On supposera cette fois encore que $X_0 > 0$.

a) *Montrons que $\mathbb{P}(X_n > X_0) = \mathbb{P}(S_n > n\theta)$ où $\theta = -\dfrac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha)}$:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n > X_0) &= \mathbb{P}[(1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n} X_0 > X_0] \\
&= \mathbb{P}[(1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n} > 1] \text{ car } X_0 > 0 \\
&= \mathbb{P}(S_n \ln(1+\alpha) + (n - S_n)\ln(1-\alpha) > 0) \text{ car } t \longmapsto \ln(t) \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
&= \mathbb{P}\left((\ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha))S_n > -n\ln(1-\alpha)\right) \text{ avec } \ln(1+\alpha) > \ln(1-\alpha) \\
&= \mathbb{P}(S_n > n\theta) \text{ où } \theta = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

Déduisons-en que pour tout $t > 0$, on a : $\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq \mathbb{E}(e^{tS_n})e^{-nt\theta}$
D'après ce qui précède, si $t > 0$

$$\mathbb{P}(S_n > n\theta) = \mathbb{P}(tS_n > nt\theta) = \mathbb{P}\left(e^{tS_n} > e^{nt\theta}\right)$$

Or, l'inégalité de Markov assure que pour toute variable aléatoire X admettant une espérance :

$$\forall \lambda > 0,\ \mathbb{P}(X > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

Dès lors, en prenant ici $\lambda = e^{nt\theta}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(S_n > n\theta) = \mathbb{P}\left(e^{tS_n} > e^{nt\theta}\right) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{nt\theta}}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq \mathbb{E}(e^{tS_n})e^{-nt\theta},\ \forall t > 0}$

b) *Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé, déterminons $\mathbb{E}\left(e^{tU_k}\right)$:*
Comme U_k est une variable aléatoire discrète finie avec $U_k(\Omega) = [\![0, 1]\!]$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ alors, d'après le théorème de transfert :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{E}\left(e^{tU_k}\right) = \sum_{i=0}^{1} e^{ti}\mathbb{P}(U_k = i) = \mathbb{P}(U_k = 0) + e^t\mathbb{P}(U_k = 1) = (1-p) + pe^t$$

Conclusion : $\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{E}\left(e^{tU_k}\right) = 1 - p + pe^t}$

c) *Déduisons-en que pour tout $t > 0$: $\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq e^{n\phi(t)}$ où $\phi(t) = \ln(pe^t + (1-p)) - t\theta$:*
Toujours d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = \mathbb{E}\left(e^{t\sum_{k=0}^{n-1} U_k}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\sum_{k=0}^{n-1} tU_k}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=0}^{n-1} e^{tU_k}\right)$$

Or les variables aléatoires U_k sont mutuellement indépendantes donc, d'après le lemme de coalition, les variables aléatoires e^{tU_k} sont indépendantes.
On rappelle alors que si V_1 et V_2 sont indépendantes, $\mathbb{E}(V_1 \cdot V_2) = \mathbb{E}(V_1)\mathbb{E}(V_2)$.
Ce résultat se généralise aisément par récurrence et permet d'écrire que si $V_1, \cdots, V_n$ sont n variables aléatoires indépendantes, alors :

$$\mathbb{E}(V_1 \cdot V_2 \cdots V_n) = \mathbb{E}(V_1)\mathbb{E}(V_2)\cdots\mathbb{E}(V_n).$$

Dès lors, en appliquant la question 3.b) :

$$\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(e^{tU_k}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} (1-p+pe^t) = (pe^t+1-p)^n$$

On peut alors faire appel à la question 3.a) :

$$\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq (pe^t+1-p)^n e^{-nt\theta} = e^{n\ln(pe^t+1-p)-nt\theta}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq e^{n\phi(t)} \text{ où } \phi(t) = \ln(pe^t+(1-p)) - t\theta,\ \forall t > 0}$

d) On cherche $\underset{\alpha\to 0}{lim}\theta(\alpha) = \underset{\alpha\to 0}{lim}\dfrac{-\ln(1-\alpha)}{\ln(1+\alpha)-\ln(1-\alpha)}$. Utilisons pour ça les développements limités à l'ordre 2 :

$$\ln(1-\alpha) = -\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2) \text{ et } \ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2).$$

D'où $\ln(1+\alpha)-\ln(1-\alpha) = 2\alpha + \circ(\alpha^2)$ et donc $\theta(\alpha) = \dfrac{\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 + \circ(\alpha^2)}{2\alpha + \circ(\alpha^2)}$.

Soit $\theta(\alpha) = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{\alpha}{2} + \circ(\alpha))$.

Conclusion : $\boxed{\underset{\alpha\to 0}{lim}\theta(\alpha) = \frac{1}{2} = l}$

e) Conformément à l'énoncé, on admet dans la suite que α est suffisamment proche de 0 pour qu'on puisse prendre $\theta = 1/2$ pour valeur approchée. On suppose de plus que $p = \dfrac{1}{5}$.
Montrons que ϕ atteint sur $\mathbb{R}_+^*$ un minimum λ strictement négatif :
Nous avons donc $\phi(t) = \ln\left(\dfrac{e^t}{5} + \dfrac{4}{5}\right) - \dfrac{t}{2}$.
ϕ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par composition et somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \geq 0$, $\phi'(t) = \dfrac{e^t}{e^t+4} - \dfrac{1}{2}$.
Donc $\phi'(t) \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^t}{e^t+4} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^t \leq e^t + 4 \Leftrightarrow e^t \leq 4 \Leftrightarrow t \leq \ln(4)$.

ϕ est donc décroissante sur $[0, \ln(4)]$, croissante sur $[\ln(4), +\infty[$ et admet un minimum en $x_0 = \ln(4)$ qui vaut

$$\lambda = \phi(\ln(4)) = \ln\left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right) - \frac{\ln(4)}{2} = \ln\left(\frac{8}{5}\right) - \ln(2) = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

Or $0 < \dfrac{4}{5} < 1$ donc $-\infty < \ln\left(\dfrac{4}{5}\right) < 0$ car $t \longmapsto \ln(t)$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+*$.

Conclusion : $\boxed{\phi \text{ atteint sur } \mathbb{R}_+^* \text{ un minimum } \lambda = \ln(4/5) \text{ strictement négatif}}$.

f) *Que peut-on dire de $\mathbb{P}(X_n > X_0)$?*
D'après la question 3.c) nous savons que $\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq e^{n\phi(t)}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.
Donc, en particulier pour $t = \ln(4)$:

$$0 < \mathbb{P}(X_n > X_0) \leq e^{\lambda n} = \left(e^{\lambda}\right)^n$$

Or $\lambda < 0$ donc $e^\lambda < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} (e^\lambda)^n = 0$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > X_0) = 0 \text{ par théorème d'encadrement des limites}}$.

Cette même inégalité permet de déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_n > X_0)$ puisque $\sum\limits_{n\geq 0}(e^\lambda)^n$ est une série géométrique convergente. En effet, par application du théorème de convergence par comparaison de deux séries à termes positifs, on a : $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_n > X_0) \text{ converge}}$.

✐***Remarque :*** *On peut démontrer (mais ce n'est pas demandé) que, dans ces conditions, l'événement $\mathcal{B}$ est de probabilité 1 ; le modèle peut ainsi être considéré comme raisonnable pour les valeurs de p et de α choisies précédemment.*

Partie 2 : Évolution modélisée par une matrice de transition

On suppose dans cette partie que la population $\mathcal{P}$ est de taille N. Le modèle suivant est fondé sur l'hypothèse d'un virus V peu dangereux (la guérison est très rapide) mais très contagieux. On suppose que la propagation de V suit le schéma suivant : si on admet qu'à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$, on a i individus porteurs de V (c'est-à-dire $(X_n = i)$ est réalisé, avec $i \in [\![0, N]\!]$) et donc $N - i$ individus sains (c'est-à-dire non porteurs de V), alors :

- *Chacun des i porteurs devient sain à l'instant $n + 1$.*
- *Chacun des $N - i$ individus sains a une probabilité $p \in]0, 1[$ (indépendante de n et de i) de devenir porteur de V, de façon indépendante les uns des autres.*

Pour $(i, j) \in [\![0, N]\!]^2$, on note $q_{i,j}$ la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1} = i)$ que $(X_{n+1} = i)$ soit réalisé sachant que $(X_n = j)$ l'est et on note M la matrice $M = (q_{i,j})_{\substack{0\leq i\leq 2\\ 0\leq j\leq 2}}$

① On traite ici, afin de se faire une idée du modèle, le cas $N = 2$.

a) *Pour $j \in [\![0, N]\!]$, on veut reconnaître la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $(X_n = j)$:*

Trois cas se présentent :

- Sachant $(X_n = 0)$ réalisé, $N = 2$ individus sont sains. La probabilité pour chacun d'entre eux de devenir porteur du virus valant p, la variable aléatoire X_{n+1} dénombre les nouveaux porteurs du virus comme autant de succès au cours de 2 épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
  Autrement dit la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $(X_n = 0)$ est $\mathcal{B}(2, p)$.
  Ou encore :
  $$\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = i) = \binom{2}{i} p^i(1-p)^{n-i},\ \forall i \in [\![0, 2]\!]$$
- Sachant $(X_n = 1)$ réalisé, il y a donc $N - 1 = 1$ individu sain. Dès lors, X_{n+1} ne peut prendre que deux valeurs qui sont 0 et 1 où $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = p$, probabilité pour l'individu sain de devenir porteur du virus.
  La loi conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $(X_n = 1)$ est $\mathcal{B}(p)$
- Sachant $(X_n = 2)$ réalisé, il n'y a donc aucun individu sain dans la population.
  la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $(X_n = 2)$ est la variable aléatoire certaine égale à 0.

D'après ce qui précède :

$$\begin{cases} q_{0,0} & = \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} p^0(1-p)^2 = (1-p)^2 \\ q_{1,0} & = \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} p^1(1-p)^1 = 2p(1-p) \\ q_{2,0} & = \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2) = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} p^2(1-p)^0 = p^2 \end{cases}$$

De même :

$$\begin{cases} q_{0,1} & = \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) = 1-p \\ q_{1,1} & = \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = p \\ q_{2,1} & = \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) = 0 \end{cases}$$

et

$$q_{0,2} = \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) = 1\,;\; q_{1,2} = \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) = 0 = q_{2,1} = \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)$$

Conclusion : $\boxed{M = \begin{pmatrix} (1-p)^2 & 1-p & 1 \\ 2p(1-p) & p & 0 \\ p^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

b) *A l'aide de la formule des probabilités totales, montrons que $U_{n+1} = MU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{(X_n=0),(X_n=1),(X_n=2)\}$ est un système complet d'événements.
Dès lors, par application de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1}=0) &= \mathbb{P}((X_{n+1}=0)\cap(X_n=0)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=0)\cap(X_n=1)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=0)\cap(X_n=2)) \\ &= q_{0,0}\mathbb{P}(X_n=0) + q_{0,1}\mathbb{P}(X_n=1) + q_{0,2}\mathbb{P}(X_n=2) \\ &= (1-p)^2\mathbb{P}(X_n=0) + (1-p)\mathbb{P}(X_n=1) + \mathbb{P}(X_n=2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=1) &= \mathbb{P}((X_{n+1}=1)\cap(X_n=0)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=1)\cap(X_n=1)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=1)\cap(X_n=2)) \\ &= q_{1,0}\mathbb{P}(X_n=0) + q_{1,1}\mathbb{P}(X_n=1) + q_{1,2}\mathbb{P}(X_n=2) \\ &= 2p(1-p)\mathbb{P}(X_n=0) + p\mathbb{P}(X_n=1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=2) &= \mathbb{P}((X_{n+1}=2)\cap(X_n=0)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=2)\cap(X_n=1)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=2)\cap(X_n=2)) \\ &= q_{2,0}\mathbb{P}(X_n=0) + q_{2,1}\mathbb{P}(X_n=1) + q_{2,2}\mathbb{P}(X_n=2) \\ &= p^2\mathbb{P}(X_n=0) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{U_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1}=0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p)^2 & 1-p & 1 \\ 2p(1-p) & p & 0 \\ p^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n=0) \\ \mathbb{P}(X_n=1) \\ \mathbb{P}(X_n=2) \end{pmatrix}}$

On vient d'obtenir que (*) : $U_{n+1} = M \cdot U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On montre que $U_n = M^n \cdot U_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, par récurrence. Posons pour ça $\mathcal{R}_n : U_n = M^n \cdot U_0$
— Pour $n=0$: $U_0 = M^0 \cdot U_0$ car $M^0 = I_3$ donc $\mathcal{R}_0$ est vraie.
  et pour $n=1$, d'après (*), : $U_1 = M \cdot U_0$ donc $\mathcal{R}_1$ est vraie.
— Supposons que $\mathcal{R}_n$ est vraie pour n fixé ($n \in \mathbb{N}$).
— Alors, toujours d'après (*) : $U_{n+1} = M \cdot U_n$.
  Il suffit alors d'utiliser l'hypothèse de récurrence pour conclure :
  $$U_{n+1} = M \cdot (M^n \cdot U_0) = M^{n+1} \cdot U_0 \text{ par transitivité du produit matriciel.}$$
— ***Conclusion*** : $\boxed{U_n = M^n \cdot U_0 \ \forall n \in \mathbb{N}}$

c) *Montrons que* $\ker(M - I_3)$, $\ker(M + pI_3)$ *et* $\ker(M - p^2I_3)$ *ne sont pas réduits au seul vecteur nul et déterminons une base de chacun d'entre eux :*

Soit $E_1 = \ker(M - I_3)$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (M - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ((1-p)^2 - 1)x + (1-p)y + z & = 0 \\ 2p(1-p)x + (p-1)y & = 0 \\ p^2x - z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(p-2)x + (1-p)y + z & = 0 \\ \qquad\qquad\qquad y & = 2px \ , \forall x \in \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad z & = p^2x \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\ker(M - I_3) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2p \\ p^2 \end{pmatrix}\right\}}$. On posera $u_1 = (1, 2p, p^2)$.

Soit $E_{-p} = \ker(M + pI_3)$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (M + pI_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ((1-p)^2 + p)x + (1-p)y + z & = 0 \\ 2p(1-p)x + 2py & = 0 \\ p^2x + pz & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p^2 - p + 1)x + (1-p)y + z & = 0 \\ \qquad\qquad\qquad y & = (p-1)x \ , \forall x \in \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad z & = -px \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\ker(M + pI_3) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ p-1 \\ -p \end{pmatrix}\right\}}$. On posera $u_2 = (1, p-1, -p)$.

Soit $E_{p^2} = \ker(M - p^2I_3)$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{p^2} \Leftrightarrow (M - p^2I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ((1-p)^2 - p^2)x + (1-p)y + z & = 0 \\ 2p(1-p)x + (p - p^2)y & = 0 \\ p^2x - p^2z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-2p)x + (1-p)y + z & = 0 \\ \qquad\qquad\qquad y & = -2x \ , \forall x \in \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad z & = x \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\ker(M - p^2I_3) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$. On posera $u_3 = (1, -2, 1)$.

d) La question précédente permet d'assurer que 1, $-p$ et p^2 sont trois valeurs propres distinctes de M. Or M est une matrice d'ordre 3. Il ne peut donc pas y avoir d'autre valeurs propres.
Dès lors $\boxed{\text{Sp}(M) = \{1, -p, p^2\}}$ et $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$ car $\text{Card}\,(\text{Sp}(M)) = 3 = ordre(M)$
En conséquence,

$$M = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2p & p-1 & -2 \\ p^2 & -p & 1 \end{pmatrix}$$

P étant une matrice inversible car matrice des coordonnées dans la base canonique de la famille de vecteurs $\{u_1, u_2, u_3\}$ qui est libre car famille de vecteurs propres associée à des valeurs propres distinctes.

e) *Calculons P^2 et déterminons P^{-1} :* Un calcul immédiat donne :

$$P^2 = \begin{pmatrix} (p+1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (p+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (p+1)^2 \end{pmatrix} = (p+1)^2 I_3$$

On a donc

$$P \cdot \frac{1}{(p+1)^2} P = I_3 = \frac{1}{(p+1)^2} P \cdot P$$

Conclusion : $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{(p+1)^2} P}$.

f) *Montrons que la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminons $\lim\limits_{n\to\infty} D^n$:*

On a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}$ donc, par récurrence, on a : $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-p)^n & 0 \\ 0 & 0 & p^{2n} \end{pmatrix}$

Or $0 < p < 1$ donc $-1 < -p < 0$ et $0 < p^2 < 1$. En conséquence $\lim\limits_{n\to\infty} (-p)^n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} p^{2n}$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

On souhaite en déduire que pour tout $k \in [\![0, 2]\!]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$ existe et donner sa valeur :

Pour répondre à cette question, on va utiliser les remarques préliminaires de la partie 2 :

— On rappelle que d'après 1.d) : $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$, alors $(M^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge puisque d'après la question précédente $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et dans ce cas :

$$\lim_{n\to\infty} M^n = P \cdot (\lim_{n\to\infty} D^n) \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(p+1)^2} P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2p & p-1 & -2 \\ p^2 & -p & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+p)^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+p)^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2p & 2p & 2p \\ p^2 & p^2 & p^2 \end{pmatrix} = B$$

— d'après 1.b) : $U_n = M^n U_0$ donc les composantes de U_n convergent vers celle de $B \cdot U_0$ lorsque n tend vers $+\infty$. Soit :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 0) \\ \mathbb{P}(X_0 = 1) \\ \mathbb{P}(X_0 = 2) \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+p)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2p \\ p^2 \end{pmatrix}$$

car $\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_0 = 2) = 1$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{(1+p)^2}, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{2p}{(1+p)^2} \text{ et } \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{p^2}{(1+p)^2}}$$

g) *Interprétons le résultat précédent en terme de propagation de virus :*

On note que pour tout $0 < p < 1$, $0 < p^2 < 2p$. En effet,

$$p^2 > 0 \text{ et } 2p - p^2 = p(2-p) > 0$$

Conclusion : On en déduit que la propagation du virus tend vers un état stable tel que la probabilité de n'avoir plus aucun individu porteur de V, égale $\dfrac{1}{(1+p)^2}$, est supérieure à la probabilité d'avoir un individu porteur de V, elle même supérieure à la probabilité que toute la population soit porteur du virus.

On peut désormais légender les deux figures ci-dessous :

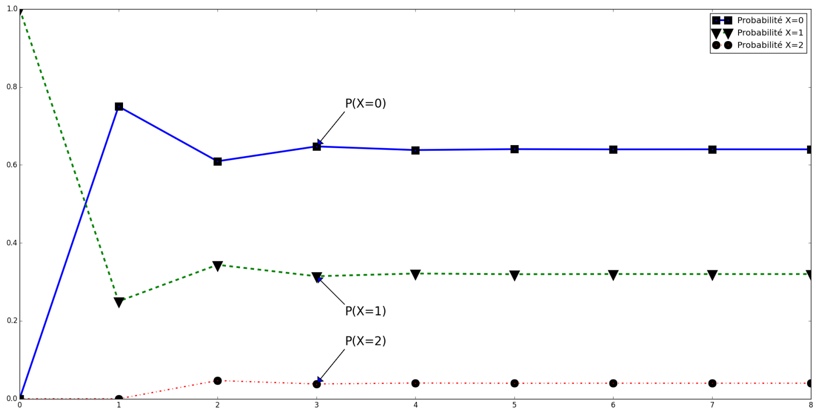

FIGURE 1 – Évolution des probabilités avec initialement 1 porteur du virus.

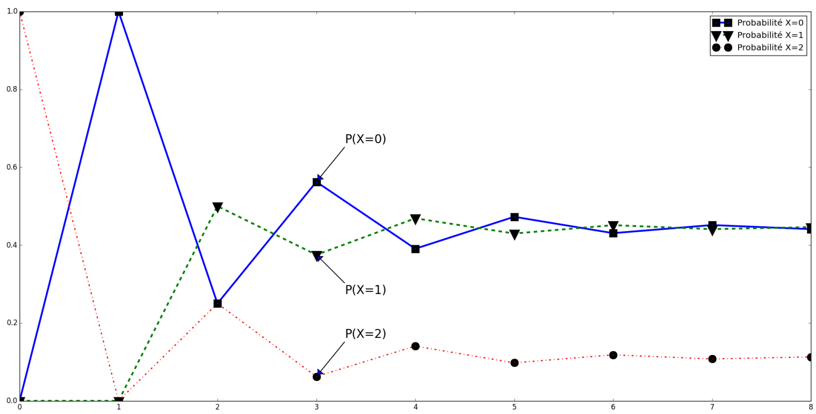

FIGURE 2 – Évolution des probabilités avec $p = 1/2$ et initialement 2 porteurs du virus

✐ *Remarque :* On peut dans ce dernier cas obtenir $p = 1/2$ car les probabilités d'avoir 1 seul individu et aucun individu porteur du virus convergent en l'infini vers la même valeur.

Soit $\dfrac{1}{(1+p)^2} = \dfrac{2p}{(1+p)^2} \Leftrightarrow 1 = 2p \Leftrightarrow p = 1/2$

② Dans le but de généraliser nos résultats à une valeur de N quelconque ($N \in \mathbb{N}^*$), la notation M est conservée pour désigner $(q_{i,j})_{\substack{0\leq i\leq N\\0\leq j\leq N}}$ tandis que U_n désigne la matrice colonne de $N+1$ lignes formée des $\mathbb{P}(X_n = k)$ pour $k \in [\![0, N]\!]$.

a) *Donnons une expression des coefficients de la matrice M (à l'aide de coefficients binomiaux) et vérifions que la somme des termes de chaque colonne vaut 1 :*

On rappelle que les coefficients de la matrice M sont notés $q_{i,j}$ avec $q_{i,j} = \mathbb{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1} = i)$.
Comme dans la question II.1.a), si l'événement $(X_n = j)$ est réalisé, cela signifie qu'il y a exactement $N-j$ individus sains à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$.
Dès lors, le nombre d'individus porteurs du virus à l'instant $n+1$ est égale au nombre de personnes nouvellement infectées au cours de $N-j$ épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p, réel égale à la probabilité pour chaque personne de devenir porteur de V.
Autrement dit X_{n+1}, conditionnée par l'événement $(X_n = j)$ suit une loi binomiale de paramètres $N-j$ et p.
Dès lors

$$\boxed{q_{i,j} = \binom{N-j}{i} p^i(1-p)^{N-j-i} \ \textbf{SI} \ \text{i<N-j}}$$

Par ailleurs, pour tout $0 \leq j \leq N$, on vérifie que la somme des termes de la j-ième colonne de la matrice M vaut :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N} q_{i,j} = \sum_{i=0}^{N-j} \binom{N-j}{i} p^i(1-p)^{N-j-i} = (p+1-p)^{N-j} = 1}$$

par application de la formule du binôme de Newton.

b) On interprète désormais M comme la matrice d'un endomorphisme de l'espace vectoriel des polynômes $E = \mathbb{R}_N[X]$. On note φ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est M.

Montrons que $\varphi(X^k) = (pX+1-p)^{N-k}$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$:
Il suffit pour ça de lire la k-ième colonne de la matrice M :

$$\begin{aligned}
\varphi(X^k) = (q_{0,k}, q_{1,k}, \cdots, q_{N,k})_{\mathcal{B}} &= \sum_{i=0}^{N-k} q_{i,k} X^i \text{ car } q_{i,k} = 0 \text{ si } i > N-k \\
&= \sum_{i=0}^{N-k} \binom{N-k}{i} (pX)^i (1-p)^{N-k-i} = (pX+1-p)^{N-k}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\varphi(X^k) = (pX+1-p)^{N-k} \text{ pour tout } k \in [\![0, N]\!]}$

c) *On remarque effectivement que* $\varphi(X^k) = \left(\dfrac{1}{pX+1-p}\right)^k \cdot (pX+1-p)^N$, $\forall k \in [\![0, N]\!]$.

Montrons que : $\forall Q \in E$, $\varphi(Q) = Q\left(\dfrac{1}{pX+1-p}\right)(pX+1-p)^N$ *:*

Pour ça posons : $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k X^k$.

Par linéarité de φ, on a immédiatement : $\varphi(Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k \varphi(X^k)$

Soit

$$\varphi(Q) = \sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{1}{pX+1-p}\right)^k \cdot (pX+1-p)^N = (pX+1-p)^N \sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{1}{pX+1-p}\right)^k$$

Conclusion : $\boxed{\forall Q \in E,\, \varphi(Q) = Q\left(\frac{1}{pX+1-p}\right)(pX+1-p)^N}$

d) Soit $Q_k(X) = (X-1)^k(pX+1)^{N-k}$.

i. *Montrons que $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, \cdots, Q_N)$ est une base de E :*

Cette famille est de cardinal égale à $N+1$ qui est la dimension de $E = \mathbb{R}_N[X]$.
Il est donc suffisant de montrer qu'elle est libre pour montrer que c'est une base de E...

On commence par noter que tous les polynômes Q_k sont de même degré égale à N dont il est illusoire d'utiliser l'échelonnement en degré.
Menons plutôt une démonstration par l'absurde...

Supposons que $\exists(\lambda_0, \cdots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{(0, \cdots, 0)\} / \sum_{k=0}^{N} \lambda_k Q_k = 0$ (*)

On pose $r = min\{i \in [\![0, N]\!] / \lambda_i \neq 0\}$. Alors :

$$(*) \Leftrightarrow \sum_{k=r}^{N} \lambda_k Q_k = 0 \Leftrightarrow (X-1)^r \sum_{k=r}^{N} \lambda_k (X-1)^{k-r}(pX+1)^{N-k} = 0$$

Or le polynôme $(X-1)^r$ est non nul donc

$$(*) \Leftrightarrow \lambda_r(pX+1)^{N-r} + \lambda_{r+1}(X-1)(pX+1)^{N-r-1} + \cdots + \lambda_N(X-1)^{N-r} = 0$$

En particulier pour $x = 1$, on obtient $\lambda_r(p+1)^{N-r} = 0$ et donc $\lambda_r = 0$.
Ce qui est absurde au regard de la définition de λ_r.

On en déduit que la famille $(Q_0, \cdots, Q_N)$ est libre.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' = (Q_0, \cdots, Q_N) \text{ est une base de } E}$.

ii. *Déterminons $\varphi(Q_k)$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$:*

On utilise le résultat de la question 2.c) :

$$\begin{aligned}
\varphi(Q_k) &= Q_k\left(\frac{1}{pX+1-p}\right)(pX+1-p)^N \\
&= \left(\frac{1}{pX+1-p} - 1\right)^k \left(\frac{p}{pX+1-p} + 1\right)^{N-k} (pX+1-p)^N \\
&= \frac{(-pX+p)^k}{(pX+1-p)^k} \frac{(pX+1)^{N-k}}{(pX+1-p)^{N-k}} (pX+1-p)^N
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\varphi(Q_k) = (-p)^k Q_k \text{ pour tout } k \in [\![0, N]\!]}$

iii. *On souhaite en déduire que M est semblable à une matrice diagonale D qu'on déterminera sans pour autant expliciter P :*

Il suffit d'écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$. D'après la question qui précède :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & (-p)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-p)^N \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{M \text{ est semblable à la matrice } D. \text{ Il existe } P \text{ inversible telle que } M = PDP^{-1}}$.

e) *Montrons que les composantes de U_n convergent également dans le cas général :*
On utilise ici encore les remarques préliminaires de la partie 2 :

— $\lim\limits_{n\to\infty} D^n$ existe et vaut :

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (-p)^n & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & (-p)^{2n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-p)^{nN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = D_1$$

car $-1 < -p < 0$
alors $(M^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $B = P \cdot D_1 \cdot P^{-1}$.

— Or $U_n = M^n U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ existe et vaut $B \cdot U_0$ où $B = \lim\limits_{n\to\infty} M^n$.

Conclusion : $\boxed{\text{Chacune des composantes de } U_n \text{ convergent lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}}$

Annexe : Recherche des noyaux par utilisation du pivot de Gauss :

Soit $E_1 = \ker(M - I_3)$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (M - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1-p)^2 - 1 & 1-p & 1 & 0 \\ 2p(1-p) & p-1 & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} p(p-2) & 1-p & 1 & 0 \\ 2p(1-p) & p-1 & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2p^2 - 2p & 1-p & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & \boxed{p-1} & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & p-1 & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p(1-p)x + (p-1)y & = 0 \\ p^2 x - z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2px - y & = 0 \\ p^2 x - z & = 0 \end{cases} \text{ car } p - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y & = 2px \\ z & = p^2 x \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{\ker(M - I_3) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2p \\ p^2 \end{pmatrix}\right\}}$. On posera $u_1 = (1, 2p, p^2)$.

Soit $E_{-p} = \ker(M + pI_3)$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-p} \Leftrightarrow (M + pI_3)X = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1-p)^2 + p & 1-p & 1 & 0 \\ 2p(1-p) & 2p & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & \boxed{p} & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} p(1-p)^2 & p - p^2 & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & 2p & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & p & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow pL_1 - L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1-p)^2 & 1-p & 0 & 0 \\ (1-p) & \boxed{1} & 0 & 0 \\ p & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{ car } p \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - (1-p)L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-p)x + y & = 0 \\ px + z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = (p-1)x \\ z & = -px \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{\ker(M + pI_3) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ p-1 \\ -p \end{pmatrix}\right\}}$. On posera $u_2 = (1, p-1, -p)$.

Soit $E_{p^2} = \ker(M - p^2 I_3)$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{p^2} \Leftrightarrow (M - p^2 I_3)X = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1-p)^2 - p^2 & 1-p & \boxed{1} & 0 \\ 2p(1-p) & p - p^2 & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & -p^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1-2p & 1-p & 1 & 0 \\ 2p(1-p) & p(1-p) & 0 & 0 \\ p^2(2-2p) & p^2(1-p) & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + p^2 L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1-2p & 1-p & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ car } p \neq 0 \text{ et } 1 - p \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-2p)x + (1-p)y + z & = 0 \\ 2x + y & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = -2x \\ z & = (2p-1)x + 2(1-p)x = x \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{\ker(M - p^2 I_3) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$. On posera $u_3 = (1, -2, 1)$.