Variables aléatoires discrètes et Algèbre linéaire

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème dont les deux parties sont complètement indépendantes. On prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer et, à titre indicatif, on pourra consacrer une heure à la première partie et une heure et demi à la suivante.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'**est** pas autorisé au cours de l'épreuve.*

Exercice

Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on pose, pour tout réel t pour lequel cela a un sens,

$$g_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance. La fonction g_X est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire X.
On rappelle que $0^0 = 1$, ce qui permet par exemple d'affirmer que $g_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$.

① **La cas des variables aléatoires discrètes finies**. Soient n un entier naturel et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $I_n = [\![0, n]\!]$.
Pour tout $k \in I_n$, on pourra noter $a_k = \mathbb{P}(X = k)$ la probabilité que X prenne la valeur k.

a) ☺ Montrer que g_X est une fonction polynôme à coefficients réels dont on précisera le degré maximal. Quelle est la valeur de $g_X(1)$?

b) ☺ Justifier la dérivabilité première et seconde de g_X sur $\mathbb{R}$ et montrer que $g'_X(1) = \mathbb{E}(X)$, $g''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$. Que vaut $\mathbb{V}(X)$ en fonction de g_X ?

c) ☺ Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p avec $0 < p < 1$. Retrouver grâce à elle les valeurs de son espérance et de sa variance.

② **La cas des variables aléatoires discrètes infinies**. si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, nous admettrons que la connaissance de $g_X(t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$ caractérise la loi de X (cela permet donc de reconnaître la loi d'une variable aléatoire connaissant sa fonction génératrice).
Par ailleurs, nous admettrons que si g_X est dérivable en 1, alors comme dans la première question $\mathbb{E}(X)$ existe et vaut $\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$.

a) Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$ est absolument convergente. En déduire que g_X est définie sur $[-1, 1]$ et donner la valeur de $g_X(1)$.

b) Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.
☺ En utilisant pour tout réel t l'expression $g_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$, montrer que si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $t \in [-1, 1]$, $g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t)$.

c) ☺ On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $g_X(t) = \dfrac{pt}{1 - qt}$ pour $t \in [-1, 1]$ (où $q = 1 - p$). En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$.
☺☺ Retrouver ce résultat par la méthode de votre choix.

d) On suppose ici que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

i. ☺ Calculer $g_X(t)$ pour $t \in [-1, 1]$ et retrouver l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

ii. ☺ Si X et Y sont deux variables indépendantes qui suivent respectivement une loi de Poisson de paramètre λ et μ. Déterminer $g_{X+Y}(t)$ et en déduire que $X + Y$ suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
☺☺ Retrouver ce résultat par une autre méthode de votre choix.

Problème :

Le but de ce problème est l'étude de deux modèles de propagation d'un virus.
Dans l'ensemble du problème, on considère une population $\mathcal{P}$ d'individus, chacun pouvant être porteur d'un virus V. Une unité de temps étant fixée (minute, heure, jour, selon la situation), on note X_0 la variable aléatoire égale au nombre d'individus de $\mathcal{P}$ porteurs de V à l'instant initial de l'étude, et plus généralement X_n la variable aléatoire égale au nombre d'individus porteurs de V au bout de n unités de temps, n étant un entier naturel.
La première partie étudie un modèle où X_n est proportionnel à X_{n-1} à chaque instant n. La seconde partie se penche sur un modèle où la dépendance de X_{n+1} en fonction de X_n est fournie par une matrice de transition

Dans tout ce problème, $\mathbb{E}(X)$ désigne, lorsqu'elle existe, l'espérance de la variable aléatoire X.

Partie I : Évolution proportionnelle

Dans cette partie, on propose d'étudier une situation où, à un instant donné n, l'agent contaminant responsable de la transmission de V peut être actif ou inactif (en raison de facteurs extérieurs qu'on ne cherche pas à étudier ici). A tout instant n, on a la probabilité p qu'il soit actif, et la probabilité $1 - p$ qu'il soit inactif, $p \in]0, 1[$ étant fixé.
On considère de ce fait une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de même loi de Bernoulli de paramètre p, U_n valant 1 si l'agent est actif à l'instant n et 0 s'il est inactif. On supposera de plus que les $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants et que U_n est indépendant de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On convient que lorsque l'agent contaminant est actif à l'instant $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'individus de $\mathcal{P}$ contaminé augmente d'un facteur $\alpha \in]0, 1[$ entre les instants n et $n + 1$, si bien que pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$U_n(\omega) = 1 \Rightarrow X_{n+1}(\omega) = (1 + \alpha)X_n(\omega)$$

De façon analogue, on conviendra que :

$$U_n(\omega) = 0 \Rightarrow X_{n+1}(\omega) = (1 - \alpha)X_n(\omega)$$

Ce modèle sera déclaré *raisonnable* si la suite (X_n) reste bornée au sens suivant : L'événement

$$\mathcal{B} = \{\text{il existe un réel } B \text{tel que pour tout } n \in \mathbb{N}, X_n \leq B\}$$

(on admet que c'en est bien un) soit quasi-certain (c'est-à-dire, ait une probabilité égale à 1).

① On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ dans toute cette question.

a) Établir que $X_n = (1 + \alpha)^{U_{n-1}}(1 - \alpha)^{1-U_{n-1}}X_{n-1}$ (✐ Ce résultat pourra être admis pour la suite).

b) Justifier le fait que $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left((1 + \alpha)^{U_{n-1}}(1 - \alpha)^{1-U_{n-1}}\right) \cdot \mathbb{E}(X_{n-1})$

c) En déduire, par application du théorème de transfert, que : $\mathbb{E}(X_n) = (1 + (2p - 1)\alpha) \cdot \mathbb{E}(X_{n-1})$.

d) Donner l'espérance de X_n en fonction de celle de X_0.

e) En supposant $\mathbb{E}(X_0) > 0$, montrer que si $p > 1/2$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$.

✐ On supposera dans la suite du sujet que, pour que le modèle soit jugé *raisonnable*, on a désormais $p \leq 1/2$.

② Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} U_k$.

a) Quelle est la loi usuelle suivie par S_n ?

b) Montrer par récurrence que $X_n = (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n} X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Pour tout $\alpha \in]0,1[$, préciser les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \longmapsto \left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^t$.

Quelle est, en fonction de X_0, α et n, la valeur maximale M_n que peut prendre X_n ?

d) Si $X_0 > 0$, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = +\infty$.

✐***Remarque :*** *Le résultat précédent semble empêcher la possibilité que le modèle proposé soit raisonnable. Néanmoins, ce maximum M_n n'est atteint qu'au rang n que si l'agent contaminant s'est montré actif lors des n premiers instants. Si p est faible et n grand, cette probabilité devient infime.*

③ Fors de la remarque ci-dessus, nous cherchons dans la suite à quantifier de façon plus rigoureuse le risque que X_n devienne très grand ,en évaluant la probabilité $\mathbb{P}(X_n > X_0)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On supposera cette fois encore que $X_0 > 0$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X_n > X_0) = \mathbb{P}(S_n > n\theta)$ où $\theta = -\dfrac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha)}$.

En déduire grâce à l'inégalité de Markov que pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq \mathbb{E}(e^{tS_n})e^{-nt\theta}$$

b) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé, déterminer $\mathbb{E}\left(e^{tU_k}\right)$.

c) En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq e^{n\phi(t)}$$

où $\phi(t) = \ln(pe^t + (1-p)) - t\theta$.

d) θ étant une fonction de α, montrer que θ tend vers $l = 1/2$ lorsque α tend vers 0.

e) On admettra dans la suite que α est suffisamment proche de 0 pour qu'on puisse prendre $\theta = l$ pour valeur approchée. On suppose de plus que $p = \dfrac{1}{5}$. Montrer que ϕ atteint sur $\mathbb{R}_+^*$ un minimum λ strictement négatif.

f) Que peut-on dire de $\mathbb{P}(X_n > X_0)$? Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_n > X_0)$?

✐***Remarque :*** *On peut démontrer (ce n'est pas demandé) que, dans ces conditions, l'événement $\mathcal{B}$ est de probabilité 1 ; le modèle sera considéré comme raisonnable pour les valeurs p et α choisies précédemment.*

Partie 2 : Évolution modélisée par une matrice de transition

Remarque préliminaire : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{0\leq i\leq N\\0\leq j\leq N}}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\left(a_{i,j}^{(n)}\right)_{\substack{0\leq i\leq N\\0\leq j\leq N}}$ les coefficients de la matrice A^n et on dit que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si, et seulement si, $b_{i,j} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{i,j}^{(n)}$ existe pour tout couple (i,j). Dans ce cas, on note $B = (b_{i,j})_{\substack{0\leq i\leq N\\0\leq j\leq N}} = \lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

On admettra par ailleurs les deux résultats suivants :

— Si A et A' sont deux matrices carrées et P est une matrice carrée inversible de même taille telles que $A = PA'P^{-1}$, alors $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(A'^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et dans ce cas $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = P\left(\lim\limits_{n\to\infty} A'^n\right)P^{-1}$.

— Si A est une matrice carrée de taille $N+1$ telle que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers B, U_0 un vecteur colonne à $N+1$ composantes, et si on note $U_n = A^n \cdot U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors les composantes de U_n convergent vers celles de $B \cdot U_0$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On suppose dans cette partie que la population $\mathcal{P}$ est de taille N. Le modèle suivant est fondé sur l'hypothèse d'un virus V peu dangereux (la guérison est très rapide) mais très contagieux. On suppose que la propagation de V suit le schéma suivant : si on admet qu'à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$, on a i individus porteurs de V (c'est-à-dire $(X_n = i)$ est réalisé, avec $i \in [\![0,N]\!]$) et donc $N-i$ individus sains (c'est-à-dire non porteurs de V), alors :

— Chacun des i porteurs devient sain à l'instant $n+1$.

— Chacun des $N-i$ individus sains a une probabilité $p \in]0,1[$ (indépendante de n et de i) de devenir porteur de V, de façon indépendante les uns des autres.

Pour $(i,j) \in [\![0,N]\!]^2$, on note $q_{i,j}$ la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1}=i)$ que $(X_{n+1}=i)$ soit réalisé sachant que $(X_n = j)$ l'est.

① On traite ici, afin de se faire une idée du modèle, le cas $N = 2$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)\\\mathbb{P}(X_n=1)\\\mathbb{P}(X_n=2)\end{pmatrix}$ et on note M la matrice $M = (q_{i,j})_{\substack{0\leq i\leq 2\\0\leq j\leq 2}}$.

✐ *Notez que M et une matrice 3×3 dont les lignes et les colonnes sont numérotées de 0 à 2.*

a) Pour $j \in [\![0,N]\!]$, on cherche la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $(X_n = j)$.
N valant 2, trois cas de présentent : Montrer que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $(X_n = 0)$ est la loi $\mathcal{B}(2,p)$, et étendre ce résultat à la loi conditionnelles de X_{n+1} sachant l'événement $(X_n = 1)$ puis sachant l'événement $(X_n = 2)$.
En déduire que :

$$M = \begin{pmatrix}(1-p)^2 & 1-p & 1\\2p(1-p) & p & 0\\p^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $U_{n+1} = MU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de U_n en fonction de U_0 et d'une puissance de la matrice M.

c) On rappelle que, si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\ker(A)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\ker(A) = \left\{X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / A\cdot X = 0\right\}.$$

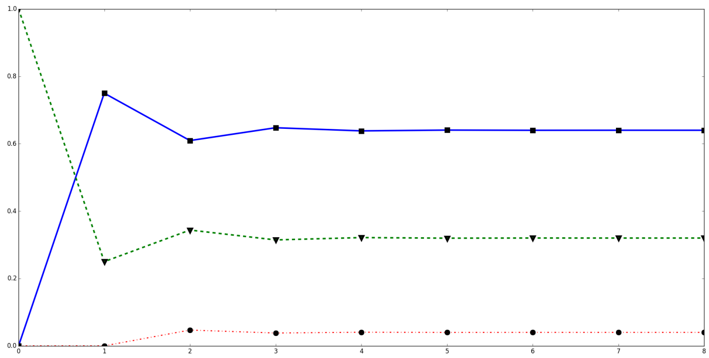
Montrer que $\ker(M - I_3)$, $\ker(M + pI_3)$ et $\ker(M - p^2 I_3)$ ne sont pas réduits au seul vecteur nul et déterminer une base de chacun d'entre eux de telles manière que la première coordonnée de chaque vecteur de base soit égale à 1.

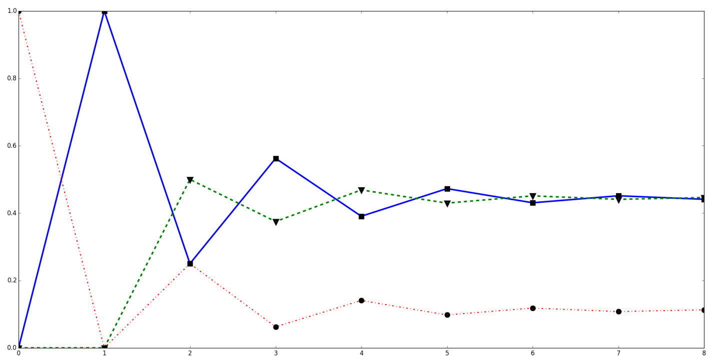
d) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}$. Montrer que M est semblable à la matrice D et préciser la matrice P telle que $M = PDP^{-1}$ en justifiant son inversibilité.

e) Calculer P^2 et déterminer P^{-1}.

f) Montrer que la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer $\underset{n\to\infty}{lim} D^n$.
En déduire que pour tout $k \in [\![0, 2]\!]$, $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(X_n = k)$ existe et donner sa valeur.

g) Interpréter le résultat précédent en terme de propagation de virus.
Légender les deux figures ci-dessous en précisant dans chaque cas, le nombre de porteurs du virus initialement et en désignant les courbes représentant respectivement $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = 2)$.





② Dans le but de généraliser nos résultats à une valeur de N quelconque ($N \in \mathbb{N}^*$), la notation M est conservée pour désigner $(q_{i,j})_{\substack{0\leq i\leq N\\ 0\leq j\leq N}}$ tandis que U_n désigne la matrice colonne de $N+1$ lignes formée des $\mathbb{P}(X_n = k)$ pour $k \in [\![0, N]\!]$.

a) Donner une expression des coefficients de la matrice M (à l'aide de coefficients binomiaux) et vérifier par le calcul que la somme des termes de chaque colonne vaut 1.
Donner sans justification une relation entre U_n et U_0 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On interprète désormais M comme la matrice d'un endomorphisme de l'espace vectoriel des polynômes $E = \mathbb{R}_N[X]$. On note φ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est M.
Montrer que $\varphi(X^k) = (pX + 1 - p)^{N-k}$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.

c) En remarquant que $\varphi(X^k) = \left(\dfrac{1}{pX+1-p}\right)^k \cdot (pX + 1 - p)^N$, $\forall k \in [\![0, N]\!]$, montrer que :

$$\forall Q \in E,\ \varphi(Q) = Q\left(\frac{1}{pX+1-p}\right)(pX + 1 - p)^N.$$

d) Soit $Q_k(X) = (X-1)^k(pX+1)^{N-k}$.

i. Montrer que $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, \cdots, Q_N)$ est une base de E.
ii. Déterminer $\varphi(Q_k)$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.
iii. En déduire que M est semblable à une matrice diagonale D qu'on déterminera (on ne demande pas d'expliciter P).

e) Montrer que les composantes de U_n convergent également dans le cas général.