MATHEMATIQUES
Var discrètes et algèbre

✐ Corrigé proposé par François Ezanno (BCPST1 - lycée international François Premier).

Problème 1 :

① La série (A_n) est divergente et la série (B_n) est convergente.

② a) **Théorème des accroissements finis.** Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors

$$\exists c \in]a,b[: \ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

b) Soit $x > 0$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à $f = \ln$ sur l'intervalle $[x, x+1]$:

$$\exists c \in]x, x+1[: \ \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln(x).$$

D'où le résultat demandé puisque le fait que $c \in]x, x+1[$ entraîne que $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{x}$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$. En appliquant la question précédente aux réels $x = k$ et $x = k-1$ on obtient :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

Par conséquent on a d'une part :

$$A_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) = 1 + \ln(n)$$

$$A_n \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1)$$

(par télescopage).

d) On a l'encadrement :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{A_n}{\ln(n)} \leq \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)}$$

et on remarque que :

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) = 0$, par opérations ;
- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right) = 0$, par opérations.

En conclusion le théorème des gendarmes nous donne $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{\ln(n)} = 1$ donc $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

③ a) On calcule :

$$A_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{16}, \quad A_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$

En utilisant la donnée $\ln(2) \in [0,65; 0,7]$:

$$u_4 = A_3 - 2\ln(2) \geq \frac{11}{6} - \frac{14}{10} = \frac{26}{60} \geq \frac{24}{60} = 0,4$$
$$v_4 = A_4 - 2\ln(2) \geq \frac{25}{12} - \frac{13}{10} = \frac{47}{60} \leq \frac{48}{60} = 0,8.$$

b) On a pour tout $n \geq 2$:

$$u_{n+1} - u_n = A_n - A_{n-1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \geq 0,$$

d'après la question 2(b) et de même :

$$v_{n+1} - v_n = A_{n+1} - A_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0.$$

Ainsi $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Comme par ailleurs $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) = 0$, ces deux suites sont adjacentes et convergent donc vers un même réel ℓ. D'après les monotonies de ces deux suites on a :

$$\forall n \geq 2,\ u_n \leq \ell \leq v_n$$

Pour $n = 4$ la question 3(a) nous donne ainsi :

$$0,4 \leq \ell \leq 0,8.$$

④ a) On a, par identification :

$$\left(\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}\right) \Leftrightarrow \left(\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{(a+b)k - a}{k(k-1)}\right)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On a $k \geq 2$ donc $2(k-1) \geq k$ et en divisant par $k^2(k-1)$:

$$\frac{2}{k^2} \geq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Comme la série $\sum \frac{2}{k^2}$ est convergente, par comparaison la série $\sum \frac{1}{k(k-1)}$ l'est aussi.

c) On a par télescopage, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$$

donc en faisant tendre $n \to \infty$:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1.$$

On remarque maintenant que pour $n \geq 2$:

$$B_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

donc finalement $B_n \leq 1 + 1 = 2$.

Partie B

① Notons X_k le numéro de la zone tirée après la k-ème victoire. L'énoncé dit que les v.a. $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et de même loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.

a) Conséquence de l'énoncé : $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$.

b) On a $\mathbb{P}(X_2 \neq 1) = \mathbb{P}(X_2 = 2) + \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{2}{3}$.

② a) Notons N_i le nombre de fois que la zone i est tirée sur les 4 premières victoires. D'après les conditions de l'expérience, N_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4, 1/3)$ et ainsi :

$$\mathbb{P}(N_1 \geq 3) = \mathbb{P}(N_1 = 3) + \mathbb{P}(N_1 = 4) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}.$$

b) Soit A l'évènement donné par l'énoncé. On modélise naturellement l'expérience par $\Omega = \{1, 3\}^4$ avec la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur Ω. On a alors

$$\mathrm{Card} A = \binom{3}{2} \times \binom{4}{2} = 18$$

(choix des numéros des 2 zones, choix des 2 positions pour le premier numéro de zone choisi). Ainsi $\mathbb{P}(A) = \frac{18}{81}$.

③ Soit C l'évènement de l'énoncé. On remarque que

$$\overline{C} = \{N_1 \geq 3\} \cup \{N_2 \geq 3\} \cup \{N_3 \geq 3\} \cup A$$

Cette réunion étant disjointe,

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - 3 \times \frac{9}{81} - \frac{18}{81} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}.$$

Partie C

① On définit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la variable X_k égale au numéro du cadeau tiré à la k-ème victoire.

a) Le premier cadeau n'a évidemment pas été tiré auparavant donc par définition de T_i on a $T_1 = 1$ de manière certaine. Autrement dit $\mathbb{P}(T_1 = 1) = 1$ et par conséquent $\mathbb{E}(T_1) = 1 \times \mathbb{P}(T_1 = 1) = 1$.

b) T_2 peut valoir n'importe quel nombre entier naturel non nul : $T_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On a $\{T_2 > 1\} = \{X_2 = X_1\}$ donc

$$\mathbb{P}(T_2 > 1) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

② a) T_i correspond au nombre de tentatives nécessaires pour tirer un des cadeaux faisant partie des $n - (i - 1)$ cadeaux non déjà tirés. Les tirages étant indépendants, il s'agit donc d'un schéma géométrique et on peut affirmer que T_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n-i+1}{n}$.

b) On rappelle qu'une v.a. de loi $\mathcal{G}(p)$ a pour espérance $1/p$ et pour variance $(1-p)/p^2$. D'après la question précédente on a donc :

$$\mathbb{E}(T_i) = \frac{n}{n - i + 1}, \quad \mathbb{V}(T_i) = \frac{(i-1)/n}{((n - i + 1)/n)^2} = \frac{n(i-1)}{(n - i + 1)^2}.$$

③ [(a)]

Pour obtenir le nombre total de victoires jusqu'à la super cagnotte, on peut décomposer en faisant la somme, pour i allant de 1 à n, des nombres de victoires entre le $(i-1)-me$ cadeau nouveau et le i-ème cadeau nouveau. Ainsi :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

b) Par linéarité de l'espérance on en déduit que :

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(T_i) = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1}.$$

En posant $j = n+1-i$ dans cette somme on a alors :

$$\mathbb{E}(S_n) = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = nA_n.$$

c) D'après la question A.2.(c), on a

$$\mathbb{E}(S_{16}) \leq 16(1+\ln(16)) = 16(1+4\ln(2)) \leq 16(1+4\times\frac{7}{10}) = \frac{608}{10} \leq 61.$$

④ [(a)]

On montre par récurrence sur j que pour tout $j \in \text{Ent}1n$, la famille $(T_i)_{i\in\text{Ent}1j}$ est indépendante.
Ce résultat est évident pour $j=1$. Supposons maintenant que $(T_1,\dots,T_j)$ soit indépendante pour un certain j. Alors, sachant $\{T_1=t_1,\dots,T_j=t_j\}$ ($t_1,\dots,t_j \in \mathbb{N}^*$ fixés), la variable T_{j+1} suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n-j}{n}$ car on reconnaît un schéma géométrique. Ainsi pour tout $t_{k+1} \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T_1=t_1,T_2=t_2,\dots,T_{j+1}=t_{j+1})\\
&\qquad= \mathbb{P}(T_1=t_1,T_2=t_2,\dots,T_j=t_j)\mathbb{P}(T_{j+1}=t_{j+1}|T_1=t_1,T_2=t_2,\dots,T_j=t_j)\\
&\qquad= \mathbb{P}(T_1=t_1)\mathbb{P}(T_2=t_2)\dots\mathbb{P}(T_j=t_j)\mathbb{P}(T_{j+1}=t_{j+1})
\end{aligned}$$

b) Les variables T_i étant indépendantes on a donc :

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n(i-1)}{(n-i+1)^2}$$

et à nouveau avec le changement de variable $j = n+1-i$ on obtient :

$$\mathbb{V}(S_n) = n \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{j^2} = n^2B_n - nA_n.$$

On remarque que $\mathbb{V}(S_n) = n^2(B_n - A_n/n)$ or
— $\lim\limits_{n\to\infty} A_n/n = 0$ puisque $A_n \underset{n\to\infty}{\sim} ln(n)$,

— $\underset{n\to\infty}{lim} B_n > 0$.
Par opérations sur les limites on a donc

$$\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{V}(S_n) = +\infty.$$

c) D'après la question A.4.(c), on a

$$\mathbb{V}(S_n) \leq 2n^2 - nA_n \leq 2n^2.$$

⑤ [(a)]

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable S_n (qui possède bien un moment d'ordre 2), on a :

$$\mathbb{P}\left(|S_n - nA_n| \geq n\alpha\right) = \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq n\alpha\right) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2\alpha^2} \leq \frac{2n^2}{n^2\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^2}.$$

b) On remarque que $\{S_n \geq n\alpha + nA_n\} \subset \{|S_n - nA_n| \geq n\alpha\}$ donc :

$$\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha + nA_n) \leq \mathbb{P}\left(|S_n - nA_n| \geq n\alpha\right) \leq \frac{2}{\alpha^2}$$

Par complémentaire,

$$\mathbb{P}(S_n < n\alpha + nA_n) \geq 1 - \frac{2}{\alpha^2}$$

On résout : $1 - 2/\alpha^2 = 0,98 \Leftrightarrow 1/\alpha^2 = 0,01 \Leftrightarrow \alpha = 10$. On choisit donc $\alpha = 10$ et ainsi :

$$\mathbb{P}(S_{16} < 160 + 16A_{16}) \geq 0,98.$$

A fortiori, puisque $16A_{16} \leq 61$, on a :

$$\mathbb{P}(S_{16} \leq 160 + 60)\mathbb{P}(S_{16} < 160 + 61) \geq \mathbb{P}(S_{16} < 160 + 16A_{16}) \geq 0,98.$$

Le nombre de victoires demandé est donc 220.

Problème 2 :

Partie A : Premier exemple dans $\mathbb{R}^2$

① Soit (E) l'équation $y'' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{9}y = 0$ d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. (E) est une équation différentielle homogène linéaire du second ordre, son équation caractéristique est l'équation :

$$r^2 - \frac{2}{3}r + \frac{1}{9} = 0$$

d'inconnue r complexe et de solution $\frac{1}{3}$ car, pour tout complexe r, on a $\left(r - \frac{1}{3}\right)^2 = r^2 - \frac{2}{3}r + \frac{1}{9}$. On en déduit que, pour toute fonction y dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, on a : y solution de $(E) \Leftrightarrow$ Il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que : $y : t \longmapsto \exp\left(\frac{t}{3}\right) \times (\lambda_1 + \lambda_2 t)$.

② a) Par produit, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, soit l'hypothèse $\mathcal{Z}(n)$ suivante : $\mathcal{Z}(n)$: "Il existe deux réels a_n et b_n tels que : $\varphi^{(\mathrm{n})} : t \mapsto (a_n t + b_n) \exp\left(\frac{t}{3}\right)$." Posons $a_0 = ab_0 = b$, on a alors : $\varphi^{(0)} : t \mapsto (a_0 t + b_0) \exp\left(\frac{t}{3}\right)$ car $\varphi^{(0)}$ est, par définition, $\varphi.\mathcal{Z}(0)$ est donc vraie. Supposons désormais $\mathcal{Z}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Il existe alors deux réels a_n et b_n tels que : $\varphi^{(n)} : t \mapsto (a_n t + b_n) \exp\left(\frac{t}{3}\right)$. Pour tout réel t, on a alors :

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+1)}(t) &= \left(a_n + \frac{b_n}{3} + \frac{a_n t}{3}\right) \exp\left(\frac{t}{3}\right) \\ &= (a_{n+1} t + b_{n+1}) \exp\left(\frac{t}{3}\right) \text{ en posant } : a_{n+1} = \frac{a_n}{3} \text{ et } b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{3}\end{aligned}$$

$\mathcal{Z}(n+1)$ est alors vraie. $\mathcal{Z}(0)$ est vraie et, pour tout entier naturel n, $\mathcal{Z}(n)$ implique $\mathcal{Z}(n+1)$. $\mathcal{Z}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de récurrence.

On a prouvé qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi^{(n)} : t \mapsto (a_n t + b_n) \exp\left(\frac{t}{3}\right)$.

b) Soit un entier naturel, on a alors :

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= a_{n+1} + \frac{b_{n+1}}{3} \\ &= \frac{a_n}{3} + \frac{b_{n+1}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(b_{n+1} - \frac{b_n}{3}\right) + \frac{b_{n+1}}{3} \\ &= \frac{2}{3} b_{n+1} - \frac{1}{9} b_n \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} a_{n+1} - \frac{1}{9} a_n &= \frac{2}{3} a_{n+1} - \frac{3}{9} a_{n+1} \\ &= \frac{1}{3} a_{n+1} \\ &= a_{n+2} \end{aligned}$$

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{2}{3} a_{n+1} - \frac{1}{9} a_n, b_{n+2} = \frac{2}{3} b_{n+1} - \frac{1}{9} b_n$.

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, les solutions de son équation caractéristique, qui est l'équation $r^2 - \frac{2}{3} r + \frac{1}{9} = 0$ d'inconnue r complexe, étant $\frac{1}{3}$, on en déduit qu'il existe A et B deux réels tels que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (A + Bn).$$

et, comme on connait a_0 et a_1, on a facilement A et B :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = a \\ a_1 = \frac{a}{3} \end{array}\right. \quad \text{donc : } \left\{\begin{array}{l} A = a \\ B = 0 \end{array}\right.$$

Pour tout entier naturel n, on a donc :

$$a_n = \frac{a}{3^n}$$

Ceci était évident car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et de raison $\frac{1}{3}$. De même, comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont à la même relation de récurrence, il existe A et B deux réels tels que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (A + Bn).$$

et, comme on connait b_0 et b_1, on a facilement A et B :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = b \\ b_1 = \frac{b}{3} + a \end{array} \right. \qquad \text{donc : } \left\{ \begin{array}{l} A = b \\ B = 3a \end{array} \right.$$

Pour tout entier naturel n, on a donc :

$$b_n = \frac{b}{3^n} + \frac{na}{3^{n-1}}$$

On a donc : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{a}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{b}{3^n} + \frac{na}{3^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

③ a) Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on a alors :

$$\begin{aligned} A \times X_n &= \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9a_{n+1} \\ -a_n + 6a_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9a_{n+1} \\ 9a_{n+2} \end{pmatrix} \text{ d'après la question 2)b)} \\ &= 9X_{n+1} \end{aligned}$$

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \frac{1}{9} A X_n$.

b) Soit λ un complexe. On sait que λ est valeur propre de f si et seulement si la matrice $A - \lambda I_2$ est non inversible, soit si et seulement si son déterminant est nul. Or :

$$\begin{aligned} \text{de?t}\,(A - \lambda I_2) &= \text{de?t}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 9 \\ -1 & 6-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 9 \end{aligned}$$

On en déduit que $sp(f) = \{3\}$. On peut donc affirmer que $sp(f) \subset \mathbb{R}_+$.

c) On a $f(-2,1) = (9, -12-1)$ car $f : (x,y) \mapsto (9y, 6x - y)$ car f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a donc : $f(-2,1) = (9,-13)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} (-2,1) \cdot f(-2,1) &= -18 + (-13) \\ &= -31 \end{aligned}$$

De $(-2,1) \cdot f(-2,1) < 0$, on déduit :

$$f \text{ ne vérifie pas } (P).$$

Partie B Une projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$

① a) Pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A) \\
&\Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \\ -2x + y + 5z = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y - z = \\ 2x + 5y + z = 0 \\ 6y + 6z = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(f) &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = 2z \text{ et } y = -z\big\} \\
&= \{(2z, -z, z) \text{ avec } z \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{Vect}((2,-1,1))
\end{aligned}$$

La famille $((2,-1,1)\ )$ est donc une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$. De plus, cette famille est libre (un seul vecteur et il est non nul). C'est donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Une base de $\operatorname{Ker}(f)$ est $((2,-1,1))$.
Soit x un élément de $\mathbb{R}^3$, on pose $(a,b,c) = x$. Comme f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a :

$$\begin{aligned}
6(f(x) - x) &= (2a + 2b - 2c, 2a + 5b + c, -2a + b + 5c) - (6a, 6b, 6c) \\
&= (-4a + 2b - 2c, 2a - b + c, -2a + b - c) \\
&= (-2a + b - c)(2, -1, 1)
\end{aligned}$$

On en déduit que $f(x) - x \in \operatorname{Vect}\ ((2,-1,1))$ et donc, d'après le résultat prouvé dans la première partie de cette question, que $f(x) - x \in \operatorname{Ker}(f)$. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, on a bien : $f(x) - x \in \operatorname{Ker}(f)$.

b) $\operatorname{Im}(f)$ est, d'après le théorème du rang, un espace de dimension 3 - dim $(\operatorname{Ker}(f))$, i.e. 2. Or, $((1,1,-1),(2,5,1))$ est une famille libre (deux vecteurs non colinéaires) de $\operatorname{Im}(f)$ (car c'est la famille $(f(3,0,0), f(0,6,0)\ )$ ayant 2 éléments, c'est donc une base de $\operatorname{Im}(f) \cdot \operatorname{Im}(f)$ est donc bien un plan $\mathcal{P}$. Soit (x,y,z) un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On a donc :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \operatorname{Im}(f) &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x,y,z) = a(1,1,-1) + b(2,5,1) \\
&\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = a + 2b \\ y = a + 5b \\ z = -a + b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} a + 2b = x \\ 3b = y - x \\ 3b = z + x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow z + x = y - x.
\end{aligned}$$

(x,y,z) appartient donc à $\mathrm{Im}(f)$ si et seulement si on a $2x-y+z=0$. On a prouvé ainsi l'égalité suivante :

$$\mathrm{Im}(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que } 2x-y+z=0\right\}.$$

Une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$ est $2x-y+z=0$ et un vecteur normal est $(2,-1,1)$.

c) Soit x un élément de $\mathbb{R}^3\cdot f(x)$ appartient à $\mathcal{P}$ par définition de $\mathcal{P}$. De plus, on a vu que $f(x)-x$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ qui est Vect $((2,-1,1)\ )$ (question 1)a)) qui est $\mathcal{P}^\perp$ (car on a vu dans la question précédente que $(2,-1,1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$). On déduit de ces deux résultats que f est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

② a) Notons d la distance de x au plan $\mathcal{P}$. Comme f est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} d &= \|x-f(x)\| \\ &= \frac{1}{6}\sqrt{(-2x_1+x_2-x_3)(2,-1,1)\cdot(-2x_1+x_2-x_3)(2,-1,1)} \\ &= \frac{|-2x_1+x_2-x_3|}{6}\sqrt{4+1+1} \\ &= \frac{|-2x_1+x_2-x_3|}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Par le théorème de Pythagore, comme $x-f(x)$ et $f(x)$ sont orthogonaux (puisque f est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$), on en déduit que $\|x-f(x)\|^2+\|f(x)\|^2=\|x\|^2$ ce qui prouve que $\|x-f(x)\|\leqslant\|x\|$. Or, on vient de voir que $\|x-f(x)\|=\frac{|2x_1-x_2+x_3|}{\sqrt{6}}$ et on sait que $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$. Cela signifie donc que : $\frac{|2x_1-x_2+x_3|}{\sqrt{6}}\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

b) On vient de voir que : $\frac{|2x_1-x_2+x_3|}{\sqrt{6}}\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, cela donne $0\leqslant\frac{|2x_1-x_2+x_3|}{\sqrt{6}}\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ puis, par croissance de $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que :

$$|2x_1-x_2+x_3|^2\leqslant\left(\sqrt{6x_1^2+6x_2^2+6x_3^2}\right)^2$$

soit $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3+4x_1x_3\leqslant 6x_1^2+6x_2^2+6x_3^2$ Cela donne bien : $-4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3\leqslant 2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2$

c) On a :

$$\begin{aligned} 6x\cdot f(x) &= (2x_1+2x_2-2x_3,2x_1+5x_2+x_3,-2x_1+x_2+5x_3)\cdot(x_1,x_2,x_3) \\ &= 2x_1^2+2x_2x_1-2x_3x_1+2x_1x_2+5x_2^2+x_3x_2-2x_1x_3+x_2x_3+5x_3^2 \\ &= 2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2-(-4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3) \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on peut dire que $x\cdot f(x)\geqslant 0$ et donc f vérifie (P).

Partie C : Deux exemples dans $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul. I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et $f^\star$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice transposée de A, notée ${}^tA$.

① On rappelle que si $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ celles d'un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = {}^tU \times V \text{ avec } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

a) Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$. On note X la matrice de ses coordonnées dans la base canonique, on a :

$$\begin{aligned} f(x) \cdot x &= {}^t(AX) \times X \text{ d'après le rappel} \\ &= {}^tX \times \left({}^tA \times X\right) \\ &= x \cdot f^\star(x) \end{aligned}$$

Comme $f(x) \cdot x = x \cdot f(x)$, on en déduit : On a prouvé que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \cdot f(x) = x \cdot f^\star(x)$.

b) Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$.

i. Supposons que f vérifie (P). On a alors $x \cdot f(x) \geqslant 0$. De la question précédente, on déduit que $x \cdot f^\star(x) \geqslant 0$. Par somme, on a donc : $x \cdot f(x) + x \cdot f^\star(x) \geqslant 0$ soit, par linéarité à droite du produit scalaire, $x \cdot (f + f^\star)(x) \geqslant 0$. Comme x est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$, cela prouve que $f + f^\star$ vérifie (P).

ii. Supposons que $f + f^\star$ vérifie (P). On a alors $x \cdot (f + f^\star)(x) \geqslant 0$, soit $x \cdot f(x) + x \cdot f^\star(x) \geqslant 0$. De la question précédente, on déduit que $2x \cdot f(x) \geqslant 0$ soit $x \cdot f(x) \geqslant 0$. Comme x est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$, cela prouve que f vérifie (P). On peut donc affirmer que f vérifie (P) si et seulement si $f + f^\star$ vérifie (P).

c) $A + {}^tA$ est une matrice symétrique (car${}^t\left(A + {}^tA\right) = {}^tA + A$) à coefficients réels. D'après le cours, on sait que cela entraîne qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQ = Q^{-1}$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A + {}^tA = QDQ^{-1}.$$

d) On pose $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D$, on a donc $sp\,(f + f^*) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$. On remarque

que, si X est un vecteur colonne, alors ${}^tQX$ aussi. En utilisant ce fait, on obtient :

$$\begin{aligned}
&f \text{ vérifie } (P) \iff f+f^\star \text{ vérifie } (P) \text{ d'après la question 1)b)}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}^n, x\cdot (f+f^*)(x) \geqslant 0\\
&\iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX \times \left(\left(A+{}^tA\right)X\right) \geqslant 0\\
&\iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX \times \left(QD^tQX\right) \geqslant 0 \text{ d'après la question précédente}\\
&\iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t\left({}^tQX\right) \times D \times \left({}^tQX\right) \geqslant 0\\
&\iff \forall (a_1,a_2,\cdots,a_n) \in \mathbb{R}^n, t\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \geqslant 0\\
&\iff \forall (a_1,a_2,\cdots,a_n) \in \mathbb{R}^n, t\begin{pmatrix} a_1\lambda_1\\ a_2\lambda_2\\ \vdots\\ a_n\lambda_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \geqslant 0\\
&\iff \forall (a_1,a_2,\cdots,a_n) \in \mathbb{R}^n, a_1^2\lambda_1+a_2^2\lambda_2+\cdots+a_n^2\lambda_n \geqslant 0\\
&\iff \forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i \geqslant 0
\end{aligned}$$

Pour expliquer la dernière équivalence, il suffit de poser $a_1 = 1$ puis, pour tout i de $[\![2,n]\!], a_i = 0$. Cela entraîne que $\lambda_1 \geqslant 0$. Après, on pose $a_2 = 1$ puis, pour tout i de $[\![1,n]\!]\backslash\{2\}, a_i = 0$. On obtient alors $\lambda_2 \geqslant 0$. On poursuit après le processus. On a prouvé que f vérifie (P) si et seulement si $\operatorname{sp}(f+f^\star) \subset \mathbb{R}^+$.

② a) On remarque que $B + {}^tB$ est A. Comme les matrices caractérisent les applications, cela entraîne que $g+g^\star$ est f. Des questions précédentes, on déduit alors que g vérifie (P) si et seulement si $g+g^\star$ vérifie (P), soit si et seulement si f vérifie (P). On a prouvé que f vérifie (P) si et seulement si g vérifie (P).

b) Supposons g diagonalisable. B est donc diagonalisable. Or B a une seule valeur propre, c'est 1 car B est triangulaire et n'a que des 1 sur la diagonale. Il existe donc une matrice P inversible telle que $B = PI_nP^{-1}$, cela donne $B = I_n$ ce qui est absurde. g n'est effectivement pas diagonalisable.

c) $A - I$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 1\end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rang}(A-I)$ vaut 1 . On en déduit que 1 est une valeur propre et que le sous-espace propre de A associé à $1, E_1$, est, d'après le théorème du rang, de dimension $n-1$.

- On constate que :

$$\begin{aligned}
A \times \begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2+n-1\\ \vdots\\ 2+n-1\end{pmatrix}\\
&= (n+1)\begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice nulle, $n+1$ est donc une valeur propre de A. Le sous-espace propre de A associé à $n+1, E_2$, est au moins de dimension 1 . A est une matrice de taille n. On vient de voir que $\dim(E_1)+\dim(E_2) \geqslant n$. On en déduit que A est diagonalisable et que ses valeurs propre sont 1 et $n+1$. Les valeurs propres de f sont donc aussi 1 et $n+1$. On a donc $\operatorname{sp}(f) \subset \mathbb{R}^+$ soit $sp\left(g+g^\star\right) \subset \mathbb{R}^+$. D'après la question 1)d), cela suffit pour affirmer que g vérifie (P) et donc, d'après la question 2)a), que f vérifie (P). Des valeurs propres de $A, 1$ et $n+1$, on en a conclu que f vérifie (P).

③ a) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
— Si $i \neq j, E\left(X_iX_j\right)$ vaut alors $E\left(X_i\right)E\left(X_j\right)$, soit 1×1 soit 1 . Ainsi, dans ce cas, $E\left(X_iX_j\right)$ est bien le coefficient de A sur la i-ième ligne de la j-ième colonne.
— Si $i=j, E\left(X_iX_j\right)$ est $E\left(X_i^2\right)$, soit, d'après la formule de Konig et Huygens, $V\left(X_i\right)+\left(E\left(X_i\right)\right)^2$, i.e. 2. Dans ce cas, $E\left(X_iX_j\right)$ est bien le coefficient de A sur la i-ième ligne de la j-ième colonne.

La matrice A définie en 2. est bien la matrice dont le coefficient en i-ième ligne et j-ième colonne vaut $\mathbb{E}(X_iX_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

b) Pour être le plus clair possible, pour tout entier naturel non nul n, on note f_n l'endomorphisme canoniquement associé à A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée en 2, matrice que l'on notera A_n. Pour tout entier naturel non nul n, soit l'hypothèse $\mathcal{Z}(n)$ suivante :

$$\mathcal{Z}(n) : \text{"}\forall x=(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x\cdot f_n(x) = E\left(\left(\sum_{i=1}^n x_iX_i\right)^2\right).\text{"}$$

Soit x un réel. A_1 est (2). On a $x\cdot f_1(x) = x2x$ soit $x\cdot f_1(x) = 2x^2$. De plus, $E\left(\left(\sum_{i=1}^n x_iX_i\right)^2\right)$ est $x^2E\left(X_1^2\right)$ soit $2x^2$. $\mathcal{Z}(0)$ est donc vraie. Supposons désormais $\mathcal{Z}(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n. Gros calcul et ça marche... $\mathcal{Z}(n+1)$ est alors vraie. $\mathcal{Z}(0)$ est vraie et, pour tout entier naturel $n, \mathcal{Z}(n)$ implique $\mathcal{Z}(n+1)$.$\mathcal{Z}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de récurrence.

c) Soit $(x_1,\cdots,x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_iX_i\right)^2$ est une variable positive et ayant, par somme, une espérance. Par croissance de l'espérance, on en déduit que $E\left(\left(\sum_{i=1}^n x_iX_i\right)^2\right)$ est positif et donc que f vérifie (P). On vient de prouver à nouveau que f vérifie (P).