11 Couples de variables aléatoires discrètes

1 Couples de variables aléatoires discrètes

1.1 Loi conjointe

Définition

Définition 2.1

Soit Ω un univers. On appelle `couple de variables aléatoires discrètes` *une application de Ω dans $\mathbb{R}_+^2$ définie par :*

$$\forall \omega \in \Omega,\ (X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

où X et Y sont deux variables aléatoires discrètes.

Définition

Définition 2.2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Définir la `loi conjointe` *ou* `loi du couple` *(X, Y), c'est donner :*

① $(X, Y)(\Omega)$.

② $\forall (x, y) \in (X, Y)(\Omega)$, $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$ *aussi noté* $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$

ou bien encore :

① $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ *(qui contient $(X, Y)(\Omega)$).*

② $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$ *aussi noté* $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$

✐ *Si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis on pourra représenter la loi sous forme du tableau des $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$*

Propriété

Proposition 2.1

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes finies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ dont la loi de probabilité est définie par

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)\ \forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \text{ où } X(\Omega) = \{x_i, i \in [\![1, r]\!]\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_j, j \in [\![1, s]\!]\}$$

Alors :

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} p_{i,j} = \sum_{j=0}^{s} \sum_{i=0}^{r} p_{i,j} = 1$$

Exemple

Exemple 1.1

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules successivement avec remise et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus lors des 1er et 2nd tirage. Déterminer la loi du couple (X_1, Y) où $Y = \max(X_1, X_2)$.
Écrire une fonction Python permettant de simuler ces tirages et d'approcher la loi conjointe du couple $(X1, Y)$.

Exemple

Exemple 1.2

On lance une pièce de monnaie telle que $\mathbb{P}(P) = p$ *et* $\mathbb{P}(F) = 1 - p = q$ *où* $0 < p < 1$*. Donner la loi du couple* (X, Y) *où* X *et* Y *sont les variables aléatoires discrètes respectivement égales au rang du premier et du deuxième pile.*

1.2 Loi marginale

Définition

Définition 2.3

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires discrètes sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$*. La loi de* X *est appelée la* `première loi marginale` *du couple* (X, Y) *et* Y *est appelée* `la seconde loi marginale`.

Propriété

Proposition 2.3.

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires discrètes sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$*. On obtient les lois marginales à partir de la conjointe de la façon suivante :*

$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$
$$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Exemple

Exemple 1.3

Déterminer les lois marginales des couples dont la loi conjointe a été donnée dans les exemples 1.1. et 1.2.

1.3 Loi conditionnelle

Définition

Définition 2.4

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires discrètes sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

① *Pour tout* $y \in Y(\Omega)$ *tel que* $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$*, la* `loi conditionnelle sachant` $(Y = y)$ `de` X *est donnée par :*

$$X(\Omega) \text{ et } \forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}_{(Y=y)}(X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

② *Pour tout* $x \in X(\Omega)$ *tel que* $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$*, la* `loi conditionnelle` *sachant* $(X = x)$ *de* Y *est donnée par :*

$$Y(\Omega) \text{ et } \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{(X=x)}(Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}$$

Exemple

Exemple 1.4

Déterminer $\mathbb{P}_{(Y=2)}(X_1 = 1)$ *dans l'exple 2.1 et, dans l'exple 2.2. la loi conditionnelle sachant* $(Y = k)$ *de* X *pour* $k \geq 2$.

2 Théorème de transfert - applications

Propriété

Proposition 3.1 Théorème de transfert

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires discrètes* **finies** *sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *et soit* u *une fonction* **positive** *définie sur* $X(\Omega) \times Y(\Omega)$*. Alors*

$$\mathbb{E}(u(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} u(x,y)\mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Exemple

Exemple 2.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$*. On suppose que* X *et* Y *sont deux var à valeurs dans* $[\![1, n]\!]$ *dont la loi est donnée par :*

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!]^2,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{2}{n(n+1)} & \textit{si } i \leq j \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Soit $Z = XY$*. Déterminer* $\mathbb{E}(Z)$*.*

Propriété

Proposition 3.2 Espérance d'une somme

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires discrètes sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *tel que* $\mathbb{E}(X)$ *et* $\mathbb{E}(Y)$ *existent. Alors,*

$$\mathbb{E}(X+Y) \textit{ existe et } \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Plus généralement, si $X_1, \cdot, X_n$ *sont* n *variables aléatoires discrètes qui admettent une espérance, alors* $S_n = X_1 + \cdot + X_n$ *admet une espérance et* $\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$

Définition

Définition 3.1 Covariance

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires discrètes sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *tel que* $\mathbb{V}(X)$ *et* $\mathbb{V}(Y)$ *existent. Alors on appelle* `covariance` *de* X *et de* Y *le réel :*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

⚠ Le théorème de transfert assure que, sous ces hypothèses :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))(y - \mathbb{E}(Y))\mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Pour autant, on préférera utiliser la linéarité de l'espérance et écrire que :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)} \text{ où } \mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Propriété

Proposition 3.3 Propriétés de la covariance

Si X et Y admettent des variances, alors :

① $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$ *[Symétrie]*

② $Cov(aX_1 + bX_2, Y) = aCov(X_1,Y) + bCov(X_2,Y)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$
$Cov(X, cY_1 + dY_2) = cCov(X,Y_1) + dCov(X,Y_2)$, $\forall c,d \in \mathbb{R}$ *[Bilinéarité]*

③ $Cov(X,X) = \mathbb{V}(X)$

④ $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2Cov(X,Y)$
$\mathbb{V}(X-Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - 2Cov(X,Y)$

Exemple

Exemple 2.2

Calculer $Cov(X_1,Y)$ pour X_1 et Y introduits dans l'exemple 1.1.

3 Indépendance

Définition

Définition 4.1 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. X et Y sont `indépendantes` *si, et seulement si, pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$*

Exemple

Exemple 3.1

Les variables aléatoires définies dans les exemples 1.1. et 1.2 sont-elles indépendantes ?

⚠ On reliera avec attention les définitions et propriétés de l'indépendance données dans le cadre général du chapitre 2 : « Concepts de base des probabilités et des variables aléatoires ».

Propriété

Proposition 4.1 Propriétés de l'indépendance

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

- $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.
- $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ *puisque* $Cov(X,Y) = 0$.
- $\mathbb{V}(X_1 + \cdots X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)$ *si* $X_1, \cdots, X_n$ *est une famille mutuellement indépendante.*

Exemple

Exemple 3.2

Soit p un réel dans $]0,1[$ et n_1, n_2 et n_3 trois entiers naturels non nuls. Pour $k \in [\![1,3]\!]$, soit X_k une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n_k et p. On suppose que X_1,, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes. On pose $U = X_1 + X_2$ et $V = X_1 + X_3$.
Déterminer les lois de U et V et calculer la covariance de U et V. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Attention : Si $\text{Cov}(X,Y) = 0$, cela n'assure pas que X et Y sont indépendantes.

4 Loi de $u(X,Y)$:

4.1 loi du minimum et du maximum de deux ou n var indépendantes

Méthode

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires **indépendantes** *de fonctions de répartition respectives F_{X_1} et F_{X_2}.*

① *Soit $Y = max(X_1, X_2)$. On détermine $Y(\Omega)$ et sa fonction de répartition F_Y en écrivant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \mathbb{P}\left(max(X_1,X_2) \leq x\right) = \mathbb{P}((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq x) = F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x)$$

Dès lors, $\boxed{\forall k \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = k) = F_Y(k) - F_Y(k-1) \text{ où } F_Y(k) = F_{X_1}(k) \cdot F_{X_2}(k)}$

② *Soit $Z = min(X_1, X_2)$. On détermine $Z(\Omega)$ et on précise que :*

$$\boxed{\forall k \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1)}$$

Exemple

Exemple 4.1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p')$.
Déterminer la loi de $Z = min(X,Y)$

4.2 loi d'une somme de deux var discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

Propriété

Proposition 4.2 Somme de deux var discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors $S = X + Y$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ dont la loi est donnée par : $S(\Omega) = (X+Y)(\Omega)$ et $\forall z \in S(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(S = z) = \sum_{x \in X(\Omega)/x \leq z} \mathbb{P}(X = x, Y = z - x) = \sum_{y \in Y(\Omega)/y \leq z} \mathbb{P}(X = z - y, Y = y)$$

Exemple

Exemple 4.2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Déterminer la loi de $S = X + Y$, son espérance et sa variance.

Exemple

Exemple 4.3

Reprendre cette fois le couple (X, Y) défini dans l'exemple 1.2 et déterminer la loi $Z = Y - X$.
Montrer que X et Z sont indépendantes. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $Cov(X, Y)$

Propriété

Proposition 4.3 Loi de la somme de deux var indépendantes suivant des lois de Poisson

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Alors $S = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
Plus généralement :
Si $X_1, \cdot, X_n$ sont des variables mutuellement indépendantes telles que X_k suit une loi de Poisson de paramètre λ_k pour tout $k \in [\![1, k]\!]$. Alors : $S_n = X_1 + \cdot + X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$