MATHEMATIQUES
Var à densité et algèbre

Problème : D'après Agro-Véto A 2015

Lu dans le rapport de jury : *« L'épreuve proposait l'étude et l'utilisation de la fonction arcsin ce qui permettait de balayer de nombreux points du programme en probabilités, analyse et algèbre linéaire et de vérifier leur acquisition ou non. La variété des thèmes abordés et la progressivité des questions permettaient aux candidats de ne pas rester coincés. [...]*
Le jury regrette que les questions de cours (énoncé de théorèmes du cours comme celui de la bijection, connaissance des DL de base, définition d'un variable à densité, trigonométrie,...) n'aient pas été correctement traitées par la plupart des candidats. ***Il est dommage que les étudiants ne citent pas les hypothèses nécessaires à la validité des théorèmes cités****.*
Si les bonnes habitudes de présentation semblent toujours en application chez la plupart des candidats, ***le nombre de copies peu, voir pas du tout soignées est en augmentation****. Certaines copies sont à la limite de la lisibilité, avec nombre de questions barrées, des résultats qui ne sont pas mis en valeur, ainsi qu'une orthographe et des constructions syntaxiques parfois fantaisistes.* ***De manière générale, nous ne saurions que trop conseiller aux futurs candidats d'éviter de barrer des morceaux de question, sans faire apparaître clairement ce qui est faux et ce qui est juste*** *(ou présumé tel). Rappelons également que, en particulier lorsque les questions ne sont pas traitées dans l'ordre, il est indispensable de recopier intégralement le numéro des questions (par exemple II.6.a) et pas simplement a).*
Signalons aussi qu'il est inutile d'expliquer « ce qu'il aurait fallu faire » sans le faire : les candidats sont évalués sur leurs capacités à mener à bien des calculs et des raisonnements, et par conséquent, le jury attend une démonstration de ces capacités.
Enfin il est important de savoir se raccrocher aux indications fournies par l'énoncé et d'en profiter pour contrôler ses résultats : lorsqu'un densité de X est donnée à la question II.2., il faut savoir en profiter pour vérifier (par intégration) que la fonction de répartition obtenue à la question précédente est bien la bonne. De même, la remarque à la fin de la question III.1 aurait dû permettre de déceler des erreurs grossières. [...] »

Partie I : Définition et propriétés de la fonction A

① Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$:
La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
De plus $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, donc :

$$\boxed{\text{sinus réalise une bijection de } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \text{ sur } [-1, 1].}$$

La réciproque de cette fonction sera notée A.
Remarque : d'habitude on l'appelle arcsinus, ou encore Arcsin.

Lu dans le rapport de jury : *« La plupart des candidats reconnaissent le théorème de la bijection, mais les hypothèses n'en sont pas toujours connues, et il n'est pas rare de lire « f' est positive sur $]-\pi/2, \pi/2[$ donc f y est strictement croissante ». »*

On note alors A la réciproque de la fonction $\begin{array}{rcl}[-\pi/2, \pi/2] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin(x)\end{array}$

② *Déterminons $A(1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$:* On sait que $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc : $\boxed{A(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}.}$

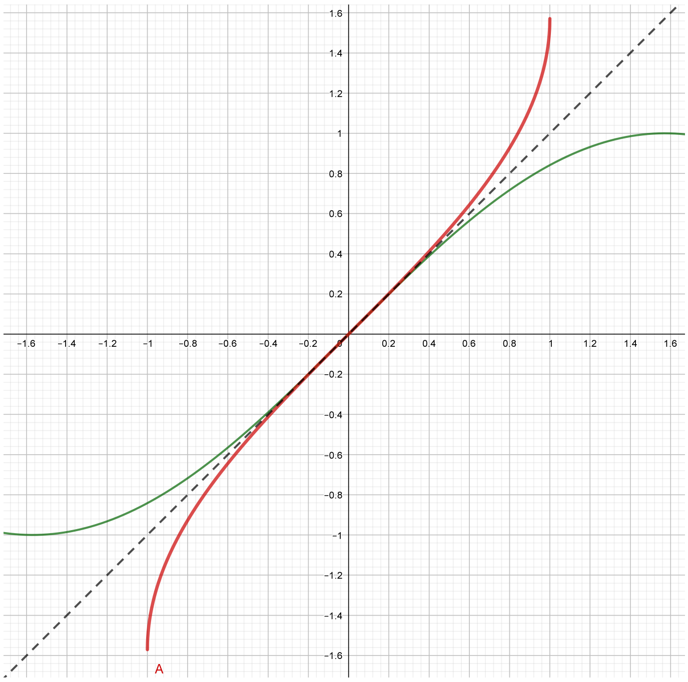
On sait que $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc : $\boxed{A(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}.}$

Remarque : pour cette question et pour de nombreuses autres, le tracé d'un cercle trigonométrique au brouillon aide énormément.

Lu dans le rapport de jury : « *Les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques sont connues d'une grande majorité des candidats, et la notion de bijection réciproque semble intuitive pour la plupart (même ceux qui auraient montré à la question précédente des difficultés avec la notion de bijection).* »

③ *Traçons le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:* Tracer la courbe représentant la fonction sin sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et obtenir la courbe de A par symétrie par rapport à la droite d'équation $(y = x)$. On insistera en particulier sur les vecteurs tangents en quelques points particuliers, d'abscisse -1, 0 et 1.

On fait par ailleurs apparaître les points remarquables vus dans les questions 1 et 2.



Lu dans le rapport de jury : « *Si beaucoup de copies présentent une ébauche de graphe dont l'allure est globalement satisfaisante, nombre de dessins manquent de soins, ou se contentent de placer trois points et de les relier à la règle. Moins d'un quart des copies mentionnent le lien de symétrie entre la courbe de A et celle de* sin. *Plus grave : parmi ces copies, on constate souvent des difficultés à réaliser une symétrie par rapport à la première bissectrice, la notion de repère orthonormé n'est pas toujours acquise. En particulier, il ne semble pas évident pour tout le monde que le point de coordonnées $(1, \pi/2)$ ne se trouve pas sur la première bissectrice.* »

④ Soit $x \in [-1,1]$. *Montrons que* $\cos(A(x)) = \sqrt{1-x^2}$ *:*
On sait que : $\cos^2\big(A(x)\big) + \sin^2\big(A(x)\big) = 1$.
Et par définition $\sin\big(A(x)\big) = x$. Donc $\cos^2\big(A(x)\big) = 1 - x^2$.
Ainsi $\big|\cos\big(A(x)\big)\big| = \sqrt{1-x^2}$.
Enfin, $A(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, intervalle sur lequel le cosinus est positif. Donc :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \ \cos\big(A(x)\big) = \sqrt{1-x^2}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Si la relation* $\cos^2 + \sin^2 = 1$ *semble connue et assimilée par la moitié des candidats, peu d'entre eux ont le réflexe de vérifier qu'un nombre est positif avant d'affirmer qu'il est égale à la racine de son carré.* »

⑤ *Montrons que la fonction* A *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et justifions que sur cet intervalle l'expression de sa dérivée est* $A'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ *:*
La fonction f =sinus est dérivable sur $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ et $f'(x) = \cos(x)$, donc f' ne s'annule pas sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ (*bien noter les bornes exclues*). Ainsi

$$\boxed{A = f^{-1} \text{ est dérivable sur } f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-1,1[.}$$

Toujours d'après le cours d'analyse de sup, $A' = \dfrac{1}{f' \circ A}$, donc :

$$\boxed{\forall t \in]-1,1[,\ \ A'(t) = \frac{1}{\cos\big(A(t)\big)} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.}$$

La dernière égalité est obtenue grâce à la question 4.

Remarque : lorsque t *se rapproche des bornes* -1 *et* 1*,* $A'(t)$ *tend vers* $+\infty$*, ce qui est une nouvelle justification des demi-tangentes verticales sur la courbe de* A *qui avaient été obtenues par symétrie avec les tangentes horizontales de sinus. Mais bien sûr l'objet du sujet n'était pas ici de s'attarder sur ces détails.*

Lu dans le rapport de jury : « *La difficulté de cette question résidait surtout dans le fait de prouver (ou plutôt de mentionner, car il s'agit là d'un théorème du cours) que* A *est dérivable là où* $\cos(A(x))$ *ne s'annule pas, et peu de candidats se souviennent de cette partie d'un théorème appris en première année, dont ils ont essentiellement retenu la formule donnant la dérivée de* A*. Environ un quart des candidats ont pensé à dériver la question précédente pour trouver* A'*, ce qui ne permettait toutefois pas de prouver que* A *est dérivable.* »

⑥ a) *Déterminons le développement limité à l'ordre un de la fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ *:*
D'après le cours sur les développements limités, on a au voisinage de 0 : $(1+t)^a = 1 + at + o(t)$.
En l'appliquant avec $a = -\frac{1}{2}$: $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \dfrac{t}{2} + o(t).}$

Lu dans le rapport de jury : *« Il s'agissait là d'une question de cours, pour laquelle on ne demandait aucun justification. Pour autant, elle n'est correctement traitée que dans la moitié des copies. Certains candidats n'aboutissent pas car ils commencent par le DL de* $\sqrt{1+t}$ *qu'ils cherchent ensuite à inverser. »*

b) *Montrons que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :*

$$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$$

Et ainsi, lorsque $x \to 0$: $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

On peut primitiver le développement limité : $A(x) = A(0) + x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Or $A(0) = 0$, car $\sin(0) = 0$ et $0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc :

$$\boxed{\text{Au voisinage de } 0 : A(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).}$$

Remarque : ici encore ce développement limité s'accorde bien avec la courbe de A tracée précédemment : en 0, cette courbe de A a une tangente d'équation $y = x$ et la courbe de A est au-dessus de cette tangente à droite de 0, et en dessous à gauche de 0 (car $A(x) - x$ est du signe de x^3).

Lu dans le rapport de jury : *« Bien que sans difficulté calculatoire, cette question demandait un peu d'aisance dans la manipulation des développements limités, en particulier lors de l'intégration du développement limité de A', où la constante d'intégration passe trop souvent à la trappe (bien qu'elle fût nulle ici). Quelques candidats courageux utilisent avec succès la formule de Taylor-Young pour obtenir le résultat. D'autres n'hésitent pas à trafiquer le résultat de la question précédente pour obtenir le résultat attendu à l'aide de deux erreurs de calcul. Ce type de comportement est à proscrire. »*

Partie II : Étude d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire Θ suivant une loi uniforme sur $[0, \pi/2]$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $X = \sin(\Theta)$.

① *Déterminons $X(\Omega)$ et la fonction de répartition F_X de X :*
Déjà $X(\Omega) = [0, 1]$. Soit $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\sin(\Theta) \leq x) \\ &= P(\Theta \leq A(x)) \quad \text{car sin strictement croissante sur } [0, \tfrac{\pi}{2}] \\ &= \frac{2}{\pi} A(x) \quad \text{car } A(x) \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \text{ et } \Theta \hookrightarrow \mathcal{U}([0, \tfrac{\pi}{2}]) . \end{aligned}$$

En résumé : $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{\pi} A(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$

Lu dans le rapport de jury : *« Si la définition de la fonction de répartition ne pose pas de problèmes particuliers, la manipulation des inégalités semble moins intuitive et seules un quart des copies mentionnent la croissance de sinus (ou de A). Les candidats ayant pensé à commencer par déterminer le support de X arrivent à justifier correctement les valeurs de $F_X(x)$ pour $x \notin [0,1]$ »*

② *En déduire que X est une variable aléatoire à densité puis montrons qu'elle admet pour densité*

$$f_X : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

F_X est continue en 0 car : $\lim\limits_{x\to 0^+} F_X(x) = \dfrac{2}{\pi}A(0) = 0$, $F_X(0) = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0^-} F_X(x) = 0$.

F_X est continue en 1 car : $\lim\limits_{x\to 1-} F_X(x) = \dfrac{2}{\pi}A(1) = 1$, $F_X(1) = 1$, et $\lim\limits_{x\to 1+} F_X(x) = 1$.

*Remarque : la vérification **indispensable** de ces limites permet en plus de repérer et de corriger une éventuelle erreur ou un oubli de constante dans la question précédente.*

Ainsi F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement de 0 et de 1, donc :

$$\boxed{X \text{ est une variable à densité.}}$$

$$\boxed{\text{Une densité de } X \text{ est : } f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}A'(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Remarque 1 : On profite de ce calcul pour dire que F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ puisque f n'est de toute évidence pas continue en 0 et en 1...

Remarque 2 : l'énoncé donne le résultat désiré, ce qui permet de vérifier et éventuellement corriger les calculs, notamment celui de A' de $(I/5)$ et celui de F_X fait en $(II/1)$.

Lu dans le rapport de jury : *« La définition de variable à densité n'est que rarement bien comprise et donne lieu à beaucoup d'erreurs. Même parmi les candidats connaissant la définition, rares sont ceux qui vérifient réellement que F_X est continue sur $\mathbb{R}$, ou qui remarquent qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ (qui ne coûte pourtant pas beaucoup plus cher que la phrase fourre-tout « F_X est $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être un nombre fini de points »). Enfin, parmi ceux qui arrivent à passer au travers de tous ces obstacles, certains n'ont pas de scrupule à dériver F_X en 0 et en 1 pour obtenir les valeurs correspondantes de la densité. »*

③ a) *Montrons que la variable aléatoire X possède une espérance et donner sa valeur :*

Sous réserve de convergence absolue, avec le théorème de transfert :

$$E(X) = E\big(\sin(\Theta)\big) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) f_\Theta(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt.$$

Cette intégrale est évidemment absolument convergente puisque sinus est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance et : } E(X) = \frac{2}{\pi}\big[-\cos(t)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.}$$

Remarque : X prenant ses valeurs dans $[0,1]$ on est rassuré d'obtenir une espérance qui est elle aussi dans $[0,1]$. Si ce n'était pas le cas on vérifierait les calculs.

Lu dans le rapport de jury : *« La partie de cette question qui a posé le plus de problème set de très loin la convergence de l'intégrale définissant l'espérance, non pas en raison de difficultés calculatoires, mais car peu de candidats ont réalisé qu'il s'agissait d'une intégrale généralisée (et alors le plus souvent en établir la convergence n'a été qu'une formalité). En revanche, le jury a été agréablement surpris de constater que nombre de candidats savaient trouver une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Quelques copies mentionnent le théorème de transfert, qui était ici plus simple car il n'y avait alors pas de réel problème à établir la convergence de l'intégrale, qui était faussement impropre en 0 et en $\pi/2$. Trouver une espérance négative ou strictement supérieures à 1 devrait amener les candidats à s'interroger. »*

b) *Quelle est la signification de ce résultat par rapport à la surface des mailles élémentaires introduites dans le préambule du problème ?*
en réalisant un réseau comme indiqué dans le préambule, avec a et b fixés et en prenant l'angle θ aléatoirement et de façon uniforme dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors l'aire de la maille élémentaire obtenue sera une variable aléatoire ayant une espérance, et l'espérance de cette aire (c'est à dire concrètement sa valeur moyenne) sera égale par linéarité de l'espérance à $\dfrac{2ab}{\pi}$.

④ *Montrons que la variable aléatoire X^2 possède une espérance et donner sa valeur :*
Sous réserve de convergence absolue, avec le théorème de transfert :

$$E(X^2) = E\big(\sin^2(\Theta)\big) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt.$$

Cette intégrale converge absolument puisque $\sin^2$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc :

$$\boxed{X^2 \text{ possède une espérance.}}$$

Pour primitiver $\sin^2$ un peu de trigonométrie est nécessaire : $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.
Ainsi : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt = \frac{1}{2}\Big[t - \frac{\sin(2t)}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$. En conclusion : $\boxed{E(X^2) = \dfrac{1}{2}.}$

Remarque : si on n'utilisait pas le théorème de transfert, il fallait utiliser le changement de variable proposé pour se ramener à l'intégrale de $\sin^2(t)$. Avec le théorème de transfert on gagne donc un peu de temps.

Lu dans le rapport de jury : *« Le changement de variables pour les intégrales impropres ne semble pas acquis pour beaucoup de candidats. Il n'est que très exceptionnellement justifié correctement. Le plus souvent, c'est l'hypothèse de stricte monotonie qui est oublié. De plus, dans nombre de copies, la convergence de l'intégrale obtenue après changement de variables n'est pas démontrée, ni même évoquée. Enfin, la linéarisation de $\sin^2$ puis le calcul de l'intégrale ajoutait une difficulté calculatoire à cette question, l'utilisation de la trigonométrie n'étant pas acquise. »*

⑤ On s'intéresse, dans cette question, au comportement asymptotique d'un échantillonnage de même loi que X.
Pour cela, on considère un entier naturel n non nul ainsi qu'un n-échantillon $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ formé par n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.
On introduit la « moyenne empirique » : $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

a) *Que valent l'espérance et la variance de M_n ?*
Par linéarité de l'espérance :

$$\boxed{E(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = E(X) = \frac{2}{\pi}.}$$

Pour la variance : $V(M_n) = \dfrac{1}{n^2} V\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)$. Puis, par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$:

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n}V(X).$$

Et, par la formule de Koenig : $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}$. Ainsi :

$$\boxed{V(M_n) = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2 n}.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Si cette question est très classique, les justifications en sont trop souvent fantaisistes (linéarité de l'espérance justifiée par l'indépendance par exemple. »*

b) On rappelle que si Y est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\varepsilon^2}$$

En déduire, en fonction de n, de l'espérance et de la variance de X, un intervalle $[a_n, b_n]$ tel que :

$$\mathbb{P}(M_n \in [a_n, b_n]) \geq 0.95$$

Puisque M_n admet une variance, on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\big(M_n \in [E(M_n) - \varepsilon, E(M_n) + \varepsilon]\big) \geq 1 - \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}.$$

On choisit alors ε tel que $\dfrac{V(M_n)}{\varepsilon^2} = \dfrac{5}{100}$. On prend $\varepsilon = \sqrt{20V(M_n)}$. Finalement :

$$\boxed{\text{On pose } a_n = E(M_n) - \sqrt{20V(M_n)} = E(X) - \sqrt{\frac{20V(X)}{n}} \text{ et } b_n = E(X) + \sqrt{\frac{20V(X)}{n}}.}$$

$$\boxed{\text{Alors on on a : } P(M_n \in [a_n, b_n]) \geq \frac{95}{100}.}$$

Remarque : ce n'était pas demandé, mais on peut noter que :

$$a_n = \frac{2}{\pi} - \sqrt{10\frac{\pi^2 - 8}{\pi^2 n}} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{\pi} + \sqrt{10\frac{\pi^2 - 8}{\pi^2 n}}.$$

Lu dans le rapport de jury : « *Cette question demandait une certaine aisance technique dans les manipulations des inégalités, et a donné lieu à nombre de bêtises. De nombreux candidats, croyant reconnaître un intervalle de confiance de l'espérance, ont essayé de faire apparaître les quantiles de la loi normale centrée réduite (le fameux* 1.96 *!).* »

⑥ On s'intéresse, dans cette question, à des événements « rares » associés à la variable aléatoire X.

a) *A l'aide de la question 6., partie I., prouvons l'existence de constantes α et β telles que :*

$$\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{n}\right) - \frac{\alpha}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\beta}{n^3}$$

On sait avec $(II-1)$ que : $P(X \leq \frac{1}{n}) = F_X(\frac{1}{n}) = \frac{2}{\pi}A(\frac{1}{n})$.

Et, avec $(I/6)$: Lorsque $x \to 0$, $A(x) - x \sim \dfrac{x^3}{6}$.

Ceci peut être appliqué avec $x = \frac{1}{n}$ qui tend bien vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$: $A(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \sim \dfrac{1}{6n^3}$.

En multipliant par $\frac{2}{\pi}$ de chaque côté :

$$\boxed{\text{Lorsque } n \to +\infty : P(X \leq \frac{1}{n}) - \frac{2}{\pi n} \sim \frac{1}{3\pi n^3}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Cette question n'a pas été souvent abordée en profondeur, et demandait une certaine aisance calculatoire, en particulier dans la manipulation des développements limités et des équivalents. Remarquons tout de même que les candidats ayant sérieusement attaqué les questions II.6.a) et II.6.b)iv. ont souvent su aller jusqu'au bout, et n'ont que rarement été tentés d'ajouter des équivalents. Il est toute de même déplorable que le développemetn limité à l'ordre 2 de cosinus en 0, question de cours ultra-classique, ne soit juste que dans moins de deux tiers des copies.* »

b) Pour tout entier n non nul, on pose $p_n = \mathbb{P}\left(X \geq 1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

Ici $p_n = P(X \geq 1 - \frac{1}{n}) = 1 - F_X(1 - \frac{1}{n})$.

i. *Déterminons la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:*

Par continuité de la fonction F_X : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 1 - F_X(1) = 0.}$

ii. *Prouvons que, pour tout entier naturel non nul, on a* $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(1 - p_n)\right) = 1 - \dfrac{1}{n}$ *:*

On a : $\sin\big(\frac{\pi}{2}(1 - p_n)\big) = \sin\big(\frac{\pi}{2}F_X(1 - \frac{1}{n})\big) = \sin\big(A(1 - \frac{1}{n})\big) = 1 - \frac{1}{n}$.

Donc on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sin\big(\frac{\pi}{2}(1 - p_n)\big) = 1 - \frac{1}{n}.}$

iii. *Rappelons le développement limité en* 0 *à l'ordre deux de la fonction* $\cos$. *:*

$$\boxed{\text{Au voisinage de } 0 : \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).}$$

iv. *En déduire une constante* c *telle que* $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{c}{\sqrt{n}}$ *:*

On sait que : $\sin(\dfrac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$. Ainsi l'égalité de (ii) devient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}p_n\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, $p_n \to 0$ d'après (i), donc on peut utiliser le DL de cos :

$$1 - \frac{\pi^2}{8}p_n^2 + o(p_n^2) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Et ainsi : $\dfrac{\pi^2}{8}p_n^2 \sim \dfrac{1}{n}$, et puisque $p_n \geq 0$ on conclut que :

$$\boxed{p_n \sim \frac{c}{\sqrt{n}} \text{ avec } c = \sqrt{\frac{8}{\pi^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.}$$

c) On cherche à vérifier grâce à Python la valeur obtenue précédemment pour c.

i. *Écrivons une fonction* ***simulX()*** *qui réalise une simulation de la variable aléatoire* X *:*

```
def simulX():
   return sin(pi/2 * random())
```

En effet, on rappelle que si $U \hookrightarrow U([0,1])$, alors $Y = (b-a)*U+a \hookrightarrow U([a,b])$ (✐*Savoir le retrouver !*)
Dès lors la variable aléatoire $\Theta = \pi/2*$`rdm.random()` suivra une loi uniforme sur $[0, \pi/2]$ puisque `rdm.random()` modélise la réalisation d'une loi uniforme sur $[0, 1]$.

ii. *Écrivons une fonction* ***evalc(n,m)*** *qui prend en argument un entier* $n \in \mathbb{N}^*$ *et un entier* m *supposé grand (de l'ordre du millier) et qui retourne une estimation de la constante* c *obtenue en 6.b)iv) :*

```
def evalc(n,m):
   S=0
   for k in range(m): # On va simuler Q fois la variable X
       X=simulX() # On r\'ealise une simulation de X
       if X>= 1-1/n:
           S=S+1 # S compte le nombre de fois que X>=1-1/n
   p=S/m  # p est une estimation de p_n
   c=p*sqrt(n) # c est une estimation de la constante c
   return(c)
```

Partie III : Suite de fonctions définies à l'aide de la fonction arcsin

Pour tout entier n, on pose $f_n : x \longmapsto \cos(2nA(x))$.

① *Calculons f_0, f_1 et f_2 en utilisant si nécessaire la formule obtenue en I/4 :*

$$\boxed{f_0(x) = \cos(0) = 1 = P_0(x) \text{ avec } P_0(X) = 1.}$$

$$f_1(x) = \cos\big(2A(x)\big) = 2\cos^2\big(A(x)\big) - 1 = 2(1-x^2) - 1. \quad \text{Ainsi :}$$

$$\boxed{f_1(x) = 1 - 2x^2 = P_1(x) \text{ avec } P_1(X) = 1 - 2X^2.}$$

$$f_2(x) = \cos\big(4A(x)\big) = 2\cos^2\big(2A(x)\big) - 1 = 2\big(f_1(x)\big)^2 - 1 = 2(1-2x^2)^2 - 1. \quad \text{Ainsi :}$$

$$\boxed{f_2(x) = 1 - 8x^2 + 8x^4 = P_2(x) \text{ avec } P_2(X) = 1 - 8X^2 + 8X^4.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Si l'on a pu lire à quelques reprise « $\cos(0) = 0$ », la détermination de f_0 ne pose généralement pas de soucis. En revanche, l'utilisation ds formules de duplication donne lieu à de nombreuses erreurs de calculs. Rappelons aux futurs candidats que la suite de l'énoncé permet parfois de détecter une éventuelle erreur de calcul, et qu'il ne faut alors pas hésiter à se servir des indications ainsi données. ainsi, lorsqu'à la fin de la question il est écrit noir sur blanc (ou presque) « on vérifiera que f_1 est un polynôme de degré 2 », il est consternant de voir quelques copies continuer d'affirmer que $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ et utiliser ce résultat dans tout le reste de la copie.* »

② a) *Soient a et b deux réels, exprimons $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$ et $\cos(b)$:*

On a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Et donc :

$$\boxed{\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).}$$

Lu dans le rapport de jury : « *De manière surprenante, cette question est la mieux traitée du problème (même s'il est vrai qu'il s'agit d'un résultat classique)* »

b) *En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :*

$$\forall x \in [-1,1],\ f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1-2x^2)f_{n+1}(x)$$

Soient n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[-1,1]$.

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) + f_n(x) &= \cos\big(2(n+1)A(x) + 2A(x)\big) + \cos\big(2(n+1)A(x) - 2A(x)\big) \\ &= 2\cos\big(2A(x)\big)\cos\big(2(n+1)A(x)\big) \end{aligned}$$

grâce à la formule de trigo obtenue en (a).

Puisque $\cos(2A(x)) = f_1(x) = 1 - 2x^2$, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1,1],\ \ f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1-2x^2)f_{n+1}(x).}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Il a été plus difficile de reconnaître les valeurs de a et b à prendre pour se servir de la question précédente.*

Rappelons qu'une question commençant par « montrer que pour tout entier naturel n » n'implique pas nécessairement une récurrence, et qu'il est inutile de démarrer une récurrence si l'on n'a pas la moindre idée de comment sera prouvée l'hérédité. »

③ *Montrons que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n de degré $2n$ tel que :*

$$\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) = P_n(x)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ posons :

$\mathcal{P}(n)$: « il existe un polynôme P_n de degré $2n$ tel que : $\forall x \in [-1,1],\ \ f_n(x) = P_n(x)$. »

Prouvons la propriété $\mathcal{P}(n)$ par récurrence double :
- Initialisation : On a déjà vu dans la question 1 que pour tout x de $[-1,1]$, $f_0(x) = 1$ et $f_1(x) = 1-2x^2$. Puisque $deg(1) = 0$ et $deg(1-2X^2) = 2$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies.

Alors, d'après $(2b)$, pour tout x de $[-1,1]$:

$$f_{n+2}(x) = 2(1-2x^2)P_{n+1}(x) - P_n(x).$$

Puisqu'un produit et une somme de polynômes est encore un polynôme, il existe bien un polynôme P_{n+2} tel que pour tout x de $[-1,1]$, $f_{n+2}(x) = P_{n+2}(x)$.

Quant au degré, on a par hypothèse de récurrence :
- d'une part, $deg(P_n) = 2n$.
- d'autre part, $deg\big(2(1-2X^2)P_{n+1}(X)\big) = 2 + deg(P_{n+1}) = 2n+4$.

Puisque ces deux degrés sont différents, le degré de f_{n+2} vaut le maximum, c'est à dire $2(n+2)$. Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
- Conclusion : Le principe de récurrence double permet de conclure que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ il existe un polynôme } P_n \text{ de degré } 2n \text{ tel que : } \forall x \in [-1,1],\ \ f_n(x) = P_n(x).}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Ici il s'agissait bien de faire une récurrence. La difficulté était de remarquer que la forme de la relation obtenue à la question précédente nécessitait une récurrence à deux pas (et donc une initialisation double ainsi qu'une hypothèse de récurrence portant sur le rang n et le rang $n-1$). Si l'on pourrait (notez l'emploi du conditionnel !) presque pardonner aux candidats qui ne supposent la propriété vérifiée qu'au rang n, les candidats qui supposent la propriété vraie au rang n et au rang $n+2$ afin de prouver qu'elle est vraie au rang $n+1$ montrent un manque total de compréhension du principe de récurrence. Au final, environ* 15% *des candidats arrivent à faire correctement la récurrence.* »

④ Soit n un entier naturel.

a) *Calculons f_n' et f_n'' :*

Puisque A est dérivable sur $]-1,1[$, f_n est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \ f_n'(x) = -2nA'(x)\sin\big(2nA(x)\big) = \frac{-2n}{\sqrt{1-x^2}}\sin\big(2nA(x)\big).}$$

On voit que f_n' est à son tour dérivable sur $]-1,1[$ comme produit de telles fonctions, et pour tout x de $]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= -2n\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\big(2nA(x)\big) - \frac{2n}{\sqrt{1-x^2}}\big(2nA'(x)\big)\cos\big(2nA(x)\big) \\ &= -2n\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\big(2nA(x)\big) - \frac{4n^2}{1-x^2}f_n(x). \end{aligned}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Si le calcul de la dérivée première est souvent correct, celui de la dérivée seconde donne plus souvent lieu à des erreurs. La question III/4.b) était triviale si l'on avait réussi ces calculs, et infaisable sans bluffer sinon (ce qui malheureusement ne dissuade pas tout le monde). Ces tentatives d'endormissements du jury en multipliant les lignes de calculs en partant d'un résultat faux mais en aboutissant au résultat demandé sont sanctionnées.* »

b) *En déduire que f_n est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :*
$$(x^2-1)y''+xy'-4n^2y=0$$
Pour tout x de $]-1,1[$ on calcule :
$$\begin{aligned} G(x) &= (x^2-1)f_n''(x)+xf_n'(x)-4n^2f_n(x) \\ &= \left(2n\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin\big(2nA(x)\big)+4n^2f_n(x)\right)-\frac{2nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin\big(2nA(x)\big)-4n^2f_n(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$
Et ainsi

$$\boxed{f_n \text{ est solution sur }]-1,1[\text{ de l'équation différentielle : } (x^2-1)y''+xy'-4n^2y=0.}$$

Partie IV : Étude d'un endomorphisme lié à la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit n un entier naturel non nul et I_n la matrice identité d'ordre n.

① On définit l'application ϕ sur $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ par :
$$\phi(P)=(X^2-1)P''+XP',\ \forall P\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$$
Montrons que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$:

- ϕ est linéaire par linéarité de la dérivée.
- Soit $P\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Déjà $(X^2-1)P''+XP'$ est un polynôme en tant que somme et produit de polynômes.
  De plus $deg(P)\leq 2n+1$, $deg(P')\leq 2n$, $deg(P'')\leq 2n-1$.
  Puis $deg(XP')=1+deg(P')\leq 2n+1$. Et $deg((X^2-1)P'')=2+deg(P'')\leq 2n+1$.

$$\boxed{\text{Au final : pour tout } P \text{ de } \mathbb{R}_{2n+1}[X],\ (X^2-1)P''+XP'\in\mathbb{R}_{2n+1}[X].}$$

Conclusion : $\boxed{\phi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_{2n+1}[X])}$

Lu dans le rapport de jury : « *Si les arguments de degré sont souvent justes, près d'un tiers des candidats abordant cette question pensent qu'un élément de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ est nécessairement de degré* ***égale*** *à $2n+1$ et non* ***inférieur ou égal****.* »

② Dans cette question, on suppose que $n=1$.

a) *Donnons la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$. On la notera M.*
On a :
$$\Phi(1)=0 \quad ; \quad \Phi(X)=X \quad ; \quad \Phi(X^2)=2(X^2-1)+2X^2=-2+4X^2$$

$$\Phi(X^3) = 6X(X^2-1) + 3X^3 = -6X + 9X^3.$$

Et ainsi :

$$\boxed{M = Mat(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}.$$

Lu dans le rapport de jury : « *La principale erreur rencontrée dans cette question concernait la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$ que de trop nombreux candidats pensent égale à 3, obtenant ainsi une matrice d'ordre 3 et non d'ordre 4, erreur qui portait à conséquence pour la suite de cette question. Pour d'autres, la base canonique est P, P', etc. ce qui est regrettable. L'obtention de la matrice est relativement bien traitée mais on note de grandes confusions entre matrice triangulaire, diagonale et diagonalisable.* »

b) *Déterminons une base du noyau et de l'image de ϕ sous forme polynomiale :*
A la lecture de la matrice qui précède, il est immédiat que $\text{rg}(M) = 3$.
Dès lors :

$$\begin{aligned}\text{Im}(\phi) &= \text{Vect}\{\phi(1), \phi(X), \phi(X^2), \phi(X^3)\} = \text{Vect}\{\phi(X), \phi(X^2), \phi(X^3)\} \\ &= \text{Vect}\{X, -2+4X^2, -6X+9X^3\}\end{aligned}$$

Cette famille de polynôme étant échelonnée en degré, elle est libre.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}_I = (X, -2+4X^2, -6X+9X^3) \text{ est une base de } \text{Im}(\phi)}$

✐*Remarque :* En combinant linéairement le premier et le dernier vecteur de $\text{Im}(\phi)$, il est possible d'obtenir une base plus simple, à savoir :

$$\mathcal{B}'_I = (X, -2+4X^2, X^3) \text{ est une autre base de } \text{Im}(\phi)$$

La détermination d'une base du noyau est immédiate car, d'après la formule du rang,

$$\dim(\text{Ker}(\phi)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - 3 = 4 - 3 = 1$$

Il suffit alors de rappeler que $\varphi(Q_0) = 0$ où Q_0 est le polynôme constant égale à 1 pour conclure :
$\boxed{\text{Ker}(\phi) = \text{Vect}\{1\} = \mathbb{R}_0[X]}$.

c) *Montrons qu'il existe 4 valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $M - \lambda I_4$ soit non inversible.*

$$\text{rg}(M - \lambda I_4) = \text{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9-\lambda \end{pmatrix} < 4 \Leftrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 1,\ \lambda = 4 \text{ ou } \lambda = 9$$

Conclusion : $\boxed{\text{Sp}(M) = \{0, 1, 4, 9\}}$.

d) Soit $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / M \cdot X = \lambda X\} = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / (M - \lambda I_4)X = 0\}$.

i. *Justifions que E_λ est un espace vectoriel pour tout λ réel :*
$E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / (M - \lambda I_4)X = 0\} = \text{Ker}(M - \lambda I_4)$
avec $M - \lambda I_4 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi - \lambda id)$.
Par ailleurs, ϕ et id sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_3[X]$ donc $\phi - \lambda id \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ pour

tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
On reconnaît donc dans E_λ le noyau d'une endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
Conclusion : $\boxed{E_\lambda \text{ est un SEV de } \mathbb{R}_3[X]}$

ii. *Déterminons une base et la dimension de E_λ pour tout $\lambda \in Sp(M)$:*
Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, on a $\mathrm{rg}(M - \lambda I_4) = 3$.
Il suffit d'appliquer la formule du rang pour conclure :
$\boxed{\dim(E_\lambda) = \dim(\mathrm{Ker}(\phi - \lambda id)) = 4 - 3 = 1}$

— Pour $\lambda = 0$, on retrouve $E_0 = \mathrm{Ker}(\phi)$ dont on connaît une base, à savoir $\mathcal{B}_0 = (1)$.

— Pour $\lambda = 1$, $M - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ Ainsi $\boxed{E_1 = Vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}$.

ou encore $\boxed{\mathcal{B}_1 = (Q_1) \text{ où } Q_1(X) = X \text{ est une base de } E_1}$.

— Pour $\lambda = 4$, $M - 4I_4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Puis : $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in E_4 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a_0 - a_2 & = 0 \\ -a_1 - 2a_3 & = 0 \\ a_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 & = -2a_0 \\ a_1 & = 0 \\ a_3 & = 0 \end{cases}$

Donc $\boxed{E_4 = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}$.

ou encore $\boxed{\mathcal{B}_4 = (Q_2) \text{ où } Q_2(X) = 1 - 2X^2 \text{ est une base de } E_4}$.

— Pour $\lambda = 9$, $M - 9I_4 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où : $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in E_9 \Leftrightarrow \begin{cases} -9a_0 - 2a_2 & = 0 \\ -4a_1 - 3ta_3 & = 0 \\ -5a_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 & = 0 \\ a_1 & = -\frac{3}{4}a_3 \\ a_2 & = 0 \end{cases}$

Donc $\boxed{E_9 = Vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}}$.

ou encore $\boxed{\mathcal{B}_9 = (Q_3) \text{ où } Q_3(X) = -3X + 4X^3 \text{ est une base de } E_9}$.

iii. *Démontrons que la juxtaposition des bases de E_{λ_0}, E_{λ_1}, E_{λ_2} et E_{λ_3} forme une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_3[X]$:* La juxtaposition de ces bases forme la famille

$$(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) = (1, X, 1 - 2X^2, -3X + 4X^3)$$

Cette famille est échelonnée en degré et donc libre.
Et puisque $\text{Card}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, on a :
Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) = (1, X, 1 - 2X^2, -3X + 4X^3) \text{ base de } \mathbb{R}_3[X]}$

e) *Exprimons la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$:*
Pour ce faire, il suffit de noter que :

$Q_0 = 1 \in \text{Ker}(\phi)$ donc $\phi(Q_0) = 0$.

$Q_1 = X \in \text{Ker}(\phi - id)$ donc $\phi(Q_1) - id(Q_1) = \phi(Q_1) - Q_1 = 0$ ou encore $\phi(Q_1) = Q_1$.

$Q_2 = X \in \text{Ker}(\phi - 4id)$ donc $\phi(Q_2) - 4id(Q_2) = \phi(Q_2) - 4Q_2 = 0$ ou encore $\phi(Q_2) = 4Q_2$.

$Q_3 = X \in \text{Ker}(\phi - 9id)$ donc $\phi(Q_3) - 9id(Q_3) = \phi(Q_3) - 9Q_3 = 0$ ou encore $\phi(Q_3) = 9Q_3$.

En conséquence : $\boxed{M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}$

③ On revient au cas général où n est un entier non nul quelconque.
Lu dans le rapport de jury : « *Ces dernière questions sont plus rarement abordées, et probablement un peu plus abstraites que les questions usuellement posées en BCPST (matrice de taille $2n+2$ avec n quelconque).* »

a) *Donnons la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$:*
Pour k entre 0 et $2n+1$:

$$\Phi(X^k) = (X^2 - 1)k(k-1)X^{k-2} + XkX^{k-1} = -k(k-1)X^{k-2} + k^2X^k.$$

D'où la matrice de Φ :

$$\boxed{M = Mat(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 4 & \ddots & -k(k-1) & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & k^2 & \ddots & -(2n+1)(2n) \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ldots & & 0 & (2n+1)^2 \end{pmatrix}}.$$

b) Soit $\text{Sp}(M) = \{\lambda \in \mathbb{R} / M - \lambda I_{2n+2} \text{ non inversible}\}$. *Déterminer $Sp(M)$:*
M est triangulaire donc les valeurs de son spectre sont ses $(2n+2)$ coefficients diagonaux. Ainsi

$$\boxed{Sp(R) = \{k^2, k \in [\![0, 2n+1]\!]\}.}$$

c) Soit $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{2n+2,1}(\mathbb{R}) / (M - \lambda I_{2n+2})X = 0\}$.
Déterminons $\dim(E_\lambda)$ *pour tout* $\lambda \in Sp(M)$ *:* Il suffit de noter que le rang de la matrice $(M - \lambda I_{2n+2})$ est égale à $2n + 2 - 1 = 2n + 1$ pour toute valeur de λ prise dans le spectre. Dès lors, par application de la formule du rang, on obtient $\dim(E_\lambda) = 1$.

d) *Pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$*, déterminons* $E_{(2k)^2}$ *en fonction de* P_k*, polynôme défini dans la partie III :*
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après le résultat de (III/4-b),

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \ (x^2 - 1)P_k''(x) + xP_k'(x) = 4k^2 P_k(x).$$

Puisqu'un polynôme qui a une infinité de racines est nul, on peut en déduire que cette égalité est valable pour tout réel x. Donc le polynôme P_k vérifie :

$$(X^2 - 1)P_k'' + XP_k' = 4k^2 P_k.$$

Ce qui se réécrit :

$$\Phi(P_k) = 4k^2 P_k.$$

De plus P_k est dans $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ car, d'après (III/3), $deg(P_k) \leq 2k \leq 2n + 1$. Ainsi P_k est un vecteur de $E_{(2k)^2}$ et puisque cet espace vectoriel est de dimension 1, P_k en constitue une base.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ de } [\![0, n]\!] : E_{(2k)^2} = Vect(P_k).}$$

Lu dans le rapport de jury : «
Conclusion : Pour finir, nous rappelons que la rédaction, l'orthographe et la présentation sont pris en compte, que l'honnêteté intellectuelle est une qualité appréciée par les correcteurs et insistons sur la nécessité de la maîtrise du cours. »