$\boxed{\text{SUJET 3}}$ Soit X de densité $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

① a) f est positive sur $\mathbb{R}$.

. $x \mapsto (1+e^{-x})^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition de $x \mapsto 1+e^{-x}$ et $t \mapsto t^2$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$.
Cette fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc :
$x \mapsto \dfrac{1}{(1+e^{-x})^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
D'où f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues.

. Montrons que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1

Le plus rapide est de montrer que f est paire car alors il suffit de montrer que $\int_0^{\infty} f(x)dx$ CV et vaut $1/2$ ...

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^2} = \dfrac{e^{x}}{e^{2x}(e^{-x}+1)^2} = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = f(x)$.

Donc f est paire.

Soit $I(a) = \int_0^a f(x)dx = \left[\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right]_0^a = \dfrac{1}{1+e^{-a}} - \dfrac{1}{2}$

or $\lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{1}{1+e^{-a}} = 1$ donc $\lim\limits_{a\to\infty} I(a) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\int_0^{\infty} f(x)dx$ converge et vaut $1/2$.

Soit (Parité de f) : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Conclusion $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$

b) Si X a pour densité f alors $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^x f(t)dt = \lim\limits_{a\to-\infty} \left[\dfrac{1}{1+e^{-t}}\right]_a^x$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} \left(\dfrac{1}{1+e^{-x}} - \dfrac{1}{1+e^{-a}}\right)$

Conclusion $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}}$

② a) On suppose que $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$; posons $Y = \ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$

(i) Soit $g(t) = \dfrac{t}{1-t}$; $g \in \mathcal{C}^1(]0,1[)$ et $\forall t \in]0,1[$, $g'(t) = \dfrac{1-t+t}{(1-t)^2} = \dfrac{1}{(1-t)^2} > 0$

Donc g bijection de $]0,1[$ sur $g(]0,1[) =]0,+\infty[$.

Def los : $U(\Omega) =]0,1[\Rightarrow \left(\frac{U}{1-U}\right)(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$

et donc $Y(\Omega) = \ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Y \leq x) = P\left[\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \leq x\right) = P\left[\frac{U}{1-U} \leq e^x\right)$

$= P(U \leq (1-U)e^x)$ car $(1-U)(\Omega) =]0,1[$

$= P((1+e^x)U \leq e^x)$

$= P\left(U \leq \frac{e^x}{1+e^x}\right) = F_U\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$

$= F_U\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = F_U(\underbrace{F_X(x)}_{\in]0,1[})$

$= F_X(x)$

Conclusion : Par caractérisation de la fonction de répartition, Y suit la loi logistique standard

b)

```
def logis():
    U = rdm.random()
    return log(U/(1-U))
```

c)

```
def esp_logis(m=10000):
    L = [logis() for k in range(m)]
    return sum(L)/m
```

: Loi faible des grands nombres

En exécutant cette fonction pour plusieurs valeurs de m, on conjecture que $E(X) = 0$

d) D'après la formule de Koënig-Huygens: $V(X) = E(X^2)$

Soit

```
def var_logis(m=10000):
    L = [logis()**2 for k in range(m)]
    return sum(L)/m
```

(3) Comme f est paire, $t \mapsto tf(t)$ est impaire.

Donc, si $\int_0^{\infty} t f(t)\,dt$ converge, alors $E(X)$ existe et vaut 0...

Il suffit donc de montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} t \cdot \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt$

Principe : $\lim\limits_{t\to\infty} t^3 f(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^3 e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = 0$ car $t^3 \underset{\infty}{=} o(e^t)$.

Donc :

$\exists a \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall t \geq a,\ t^3 f(t) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < t f(t) \leq \frac{1}{t^2}$

or $\int_a^\infty \frac{dt}{t^2}$ cv [A savoir retrouver !]

donc par TCvCIFP : $\int_a^\infty t f(t) dt$ cv $\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty t f(t) dt \text{ cv}}$

(Rel° de Chasles, $t \mapsto t f(t)$ étant continue sur $[0,a]$)

Conclusion $\boxed{E(X) \text{ existe et vaut } 0}$

④ On admet que $\sum\limits_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$

a) Montrons que $E(X^2)$ existe : Etudions $\int_{-\infty}^\infty t^2 f(t) dt$

or $t \mapsto t^2 f(t)$ est paire,
donc il suffit d'étudier la convergence de $\int_0^\infty t^2 f(t) dt$

Soit $\int_0^\infty t^2 f(t) dt = \int_0^\infty t^2 \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \int_0^\infty t^2 \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt$ [Pour utiliser l'indication...]

IPP : $\begin{cases} u(t) = t^2 & u'(t) = 2t \\ v'(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} & v(t) = -\frac{1}{1+e^t} \end{cases}$ avec $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ET $\lim\limits_{\infty} u(t)v(t) = 0$ car $t^2 \underset{\infty}{=} o(e^t)$

D'où $\int_0^\infty t^2 f(t) dt$ est de même nature que $\int_0^\infty \frac{2t}{1+e^t} dt$ qui converge par hypothèse...

D'où $\int_0^\infty t^2 f(t) dt$ converge et vaut $2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{1+e^t}$, et par parité $E(X^2)$ existe et vaut $4\int_0^\infty \frac{t}{1+e^t} dt$.

Conclusion $\boxed{\begin{array}{l} \text{Puisque } E(X)=0, \text{ on a} \\ V(X) = E(X^2) = 4\int_0^\infty \frac{t}{1+e^t} dt = 4\int_0^\infty \frac{t e^{-t}}{1+e^{-t}} dt \end{array}}$

b) On peut commencer par vérifier pour $n=0$

$\int_0^\infty x e^{-x} dx - \underbrace{\int_0^\infty \frac{x e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx}_{I_0} = \int_0^\infty \frac{x e^{-x}(1+e^{-x}) - x e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^\infty \frac{x e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$

Pour autant, ce n'est pas, ici, une récurrence...

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{\infty} x e^{-(k+1)x}\,dx = \int_0^{\infty} x e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(-e^{-x})^k\,dx \quad [\text{linéarité}]$$

$$= \int_0^{\infty} x e^{-x}\,\frac{1-(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{xe^{-x} - x(-1)^{n+1}(e^{-x})^{n+2}}{1+e^{-x}}\,dx$$

Soit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{\infty} x e^{-(k+1)x}\,dx + I_n = \int_0^{\infty}\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx}$$

c) $\forall k\in\mathbb{N}$, Soit $J_k = \int_0^{\infty} x e^{-(k+1)x}\,dx$

On effectue le changement de variable $s=(k+1)x = u(x)$ avec $u\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, u strict $\nearrow$.

Donc J_k est de même nature que

$$\int_0^{\infty}\frac{s}{k+1}e^{-s}\frac{ds}{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2}\int_0^{\infty} s e^{-s}\,ds.$$

or $\int_0^{\infty} s e^{-s}\,ds$ cv et vaut $E(T)=1$ où $T\hookrightarrow\mathcal{E}(1)$.

Conclusion $\boxed{\int_0^{\infty} x e^{-(k+1)x}\,dx \text{ cv et vaut } \frac{1}{(k+1)^2}}$

d) $0 < \dfrac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}} < xe^{-(n+2)x}$

d'où

$$0 < \int_0^{\infty}\frac{xe^{-(n+2)}}{1+e^{-x}}\,dx < J_{n+2} = \frac{1}{(n+2)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Conclusion $\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n = 0}$

e) D'après ④ a) $V(X) = 4\int_0^{\infty}\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k J_k$

Soit $\boxed{V(X) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}}$