$\boxed{\text{Sujet 2}}$ Soit $a \in]0,1]$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)$

(1) (i) f est positive sur $\mathbb{R}$

(ii) f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}+$ par produit de fonctions continues

et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$: f est continue sur $\mathbb{R}$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} dx$ [Relº de Chasles]

Soit $F(t) = \int_0^t \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} dx = \left[-e^{-x^2/2a} \right]_0^t$

$= 1 - e^{-t^2/2a}$

$\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$, Donc $\int_0^{\infty} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} dx$ CV et vaut 1

ou encore $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ CV et vaut 1.

Conclusion $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$

(2) Soit X var de densité f

$\forall x < 0, \quad F_X(x) = 0$ puisque $f(x) = 0 \ \forall x < 0$

$\forall x \geq 0, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{t}{a} e^{-t^2/2a} dt$ [Relº de Chasles]

$= \left[-e^{-t^2/2a} \right]_0^x = 1 - e^{-x^2/2a}$

Conclusion $\boxed{F_X(x) = \left(1 - e^{-x^2/2a}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)}$

③ Soit $Y = \frac{X^2}{2a}$ où $a \in]0,1]$

a) $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+ \Rightarrow \forall x < 0,\ F_Y(x) = 0$

$\forall x \geq 0,\ F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\frac{X^2}{2a} \leq x\right) = P(X^2 \leq 2ax)$

$= P(-\sqrt{2ax} \leq X \leq \sqrt{2ax}) = P(0 \leq X \leq \sqrt{2ax})$

$= F_X(\sqrt{2ax}) = 1 - e^{-2ax/2a} = 1 - e^{-x}$

Soit $F_Y(x) = (1 - e^{-x}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$

b) Soit $U = 1 - e^{-Y}$ (ou encore $Y = -\ln(1-U) \ldots$)

$Y(\omega) \geq 0 \Rightarrow -Y(\omega) \leq 0 \Rightarrow 0 < e^{-Y(\omega)} \leq 1$

$\Rightarrow U(\omega) \in [0,1[$; Soit $\underline{U(\Omega) = [0,1[}$

Dès lors,

$\forall x < 0,\ F_U(x) = 0$
$\forall x \geq 1,\ F_U(x) = 1$

$\forall 0 \leq x < 1,\ F_U(x) = P(U \leq x) = P(1 - e^{-Y} \leq x) = P(e^{-Y} \geq 1 - x)$

$= P(-Y \geq \ln(1-x)) = P(Y \leq -\ln(1-x))$

$= F_Y(-\ln(1-x)) = 1 - e^{\ln(1-x)} = 1 - (1-x)$

$= x$

Conclusion $\boxed{U \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1[}}$

c)

```
def Y():
    return -log(1-rdm.random())
```

puisque rdm.random $\hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$.

d) $Y = \frac{X^2}{2a} \Leftrightarrow X^2 = 2aY \Leftrightarrow X = \sqrt{2aY}$ puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Soit

```
def X(a):
    return sqrt(2*a*Y())
```

④ a) C'est une question de cours...

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-x^2/2a} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

b) $E(X)$ existe si $\int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)|\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{a} e^{-x^2/2a}\,dx$ converge

Conformément aux indications de l'énoncé, on fait une intégration par parties.

$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = f(x) \qquad v(x) = -e^{-x^2/2a}$; $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$

$$\lim_{x\to\infty} u(x)v(x) = \lim_{x\to\infty} -x e^{-x^2/2a} = \lim_{x\to\infty} -\sqrt{2a}\cdot\frac{x}{\sqrt{2a}} e^{-x^2/2a}$$
$$= 0 \quad \text{car } \sqrt{t} \underset{\infty}{=} o(e^t)$$

Dès lors

$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{a} e^{-x^2/2a}\,dx$ est de même nature que $\int_0^{\infty} e^{-x^2/2a}\,dx$

qui converge et vaut $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-x^2/2a}}_{\text{paire}}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi a}}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx}_{=1}$

Conclusion $\boxed{E(X) \text{ existe et vaut } \frac{\sqrt{2\pi a}}{2}}$

c) $E(X^2)$ existe si $E(2aY)$ existe si $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

or $E(Y)$ existe et vaut 1, donc par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{E(X^2) \text{ existe et vaut } 2a\,E(Y) = 2a}$$

d) D'après la formule de Koenig-Huygens, on assure que $V(X)$ existe et vaut :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2a - \frac{2\pi a}{4} = \frac{4a - \pi a}{2} = \frac{(4-\pi)a}{2}}$$